كلية التربية الأساسية

قسم الرياضيات

المرحلة الثانية

# الجبر الخطي

(المحاضرة الخامسة)

**الأساس والبعد:**

تعريف: يقال لمجموعة من المتجهات $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ في فضاء المتجهات V بأنها أساس للفضاء V اذا كانت S:

1- مستقلة خطياً
2- تولد الفضاء V

مثال 1: المتجهات i=(1,0), j=(0,1) مستقلة خطياً و تولد $R^2$ وكذلك i=(1,0,0), j=(0,1,0), k=(0,0,1) مستقلة خطياً وتولد الفضاء $R^3$. لذا فأن {i, j} تكون أساس للفضاء $R^2$ وكذلك فأن {i, j, k} تكون أساس للفضاء $R^3$.

مثال2: لتكن $v_1 = (1,2,1), v_2 = (2,9,0), v_3 = (3,3,4)$ اثبت ان $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ تكون أساس للفضاء $R^3$.

الحل: نثبت أولا ان S مستقلة خطياً

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$$

$$k_1(1,2,1) + k_2(2,9,0) + k_3(3,3,4) = 0$$

$$(k_1, 2k_1, k_1) + (2k_2, 9k_2, 0) + (3k_3, 3k_3, 4k_3) = (0,0,0)$$

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \ \dots\dots(1)$$

$$2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = 0 \ \dots\dots(2)$$

$$k_1 + 4k_3 = 0 \ \dots\dots(3) \ \rightarrow \ k_1 = -4k_3$$

نعوض قيمة $k_1$ من المعادلة 3 في 1 و2

$$-4k_3 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \;\rightarrow\; 2k_2 - k_3 = 0 \ldots.(4)$$

$$-8k_3 + 9k_2 + 3k_3 = 0 \;\rightarrow\; 9k_2 - 5k_3 = 0 \ldots..(5)$$

وبحل المعادلتين 4,5 نجد

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

∴ S مستقلة خطياً

نثبت ان S تولد فضاء نفرض v= (a,b,c)

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$$

ثم نحصل على المعادلات

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = a \;\ldots\ldots(1)$$

$$2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = b \;\ldots\ldots(2)$$

$$k_1 + 4k_3 = c \;\ldots\ldots(3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (36-0) - 2(8-3) + 3(0-9)$$

$$= (36 - 10 - 27)$$

$$= -1$$

مثال 3: اثبت ان المجموعة $S = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$ أساس للفضاء المتجه V الذي يحتوي على جميع المصفوفات المربعة في السعة 2x2.

الحل:

1- نثبت ان S مستقلة خطياً

$$k_1\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}k_1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & k_2\\0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\k_3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & k_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}k_1 & k_2\\k_3 & k_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\therefore k_1=k_2=k_3=k_4=0$$

أي ان S مستقلة خطياً

2- نثبت ان Sتولد V

$$v=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$$

$$k_1\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}k_1 & k_2\\k_3 & k_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$$

نفرض a,b,c,d=1

$$\therefore k_1=k_2=k_3=k_4=1$$

$$v=1\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

∴ S تولد فضاء

∴ المجموعة S أساس للفضاء V

**النظرية: اذا كان $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ اساساً لفضاء المتجهات V فأن كل متجه في V يمكن ان يعبر عنه كتركيب خطي بصورة وحيدة من $v_1, v_2, \dots, v_n$**

البرهان:

لما كان $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ تولد V , كل متجه v في V يمكن كتابة كتركيب خطي من المتجهات في S

أي ان

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \quad \dots \dots .1$$

وكذلك

$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n \quad \dots \dots \dots 2$$

وبطرح الثانية من الأولى

$$0 = (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \cdots + (a_n - b_n)v_n$$

وبما ان S مستقلة خطياً فأن

$$a_1 - b_1 = 0 , a_2 - b_2 = 0, \dots \dots . , a_n - b_n = 0$$

لهذا يكون

$$a_1 = b_1 , a_2 = b_2, \dots \dots . , a_n = b_n$$

وهذا يبرهن ان التركيب الخطي وحيد

تعريف: ليكن V فضاء متجه غير صفري يسمى عدد المتجهات في كل من اساسات V بالبعد ويرمز له بالرمز dimV ويقرأ بعد V.

مثال: بعد الفضاء {0} هو صفر , بعد $R^2=2$ وبعد $R^3 = 3$ و هكذا فأن بعد $R^n = n$

ملاحظة 1: اذا كانت dimV=n فأن أساس V هو اكبر مجموعة متجهات في V مستقلة خطياً وهذه المجموعة يجب ان تحتوي على n من المتجهات وكذلك فأن أساس V هي اصغر مجموعة متجهات في V التي تولد V ومثل هذه المجموعة تحتوي على n من المتجهات.

ملاحظة 2: اذا كان dimV=n فأن أي مجموعة تحتوي على (n+1) من متجهات V يجب ان تكون مرتبطة خطياً. وان المجموعة التي تحتوي على (n-1) من المتجهات لا يمكن ان تولد V.

**واجب:**

1- **هل مجموعة المتجهات {(0,1,0) ,(-1,2,1) ,(3,2,2)} أساس للفضاء $R^3$**
2- **بين ان المجموعة التالية تكون أساس لفضاء المتجهات $M_{2x2}$**

$$\left\{\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$

**مبرهنة: ليكن U فضاءً جزئياً من فضاء متجهات V بعده n فأن dimU≤ n. واذا كان dimU= n فأن U=V.**

البرهان: بما ان dim V=n و أساس V مكونة من متجهات مستقلة خطياً لذلك فأن U لا يمكن ان تحتوي على اكثر من n من العناصر. وبالتالي فأن dim U≤ n

نفرض ان $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ أساس ل U فهذا يؤدي الى ان $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ تكون أساس ل V ايضاً لذا فأن U=V عندما يكون dim U= n.

مثال : ليكن U فضاء جزئي من $R^3$ بما ان $\dim R^3= 3$

من المبرهنة السابقة نستنتج ان dimU يمكن ان يكون (3 ,2 ,1 ,0) وعليه فأن لدينا الحالات الاتية

1: dim U=0 عندئذ U={0} (نقطة)

2: dim U=1 عندئذ U ( مستقيم يمر بنقطة الأصل)

3: dim U= 2 عندئذ U ( مستوى يمر بنقطة الأصل)

3: dim U= 3 عندئذ U الفضاء بأكمله $R^3$

**الاحداثيات:**

تعريف: اذا كانت $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساس لفضاء المتجهات V بعده n واذا كان v أي متجه من V فأن v يمكن كتابته على شكل تركيب خطي من متجهات S وبصورة وحيدة

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n$$

تسمى الاعداد $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ احداثيات في S وتسمى المرتبات فئة n $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ بالمتجه الاحداثي ل v بالنسبة ل S وسوف نرمز له بالرمز $[v]_s$

مثال: لتكن $V = R^3$ جد المتجه الاحداثي ل $v = (3, 1, -4)$ بالنسبة للأساس $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ حيث

$$v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)$$

الحل: نكتب v كتركيب خطي من متجهات S

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$$

$$(3,1,-4) = k_1(1,1,1) + k_2(0,1,1) + k_3(0,0,1)$$

$$k_1 = 3 \qquad \dots\dots..(1)$$

$$k_1 + k_2 = 1 \;\dots\dots..(2)$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = -4 \dots(3)$$

نعوض قيمة $k_1 = 3$ في المعادلة 1 في المعادلة 2

$$3 + k_2 = 1 \;\rightarrow\; k_2 = -2$$

وبتعويض $k_1, k_2$ في المعادلة 3

$$3 - 2 + k_3 = -4 \;\rightarrow\; k_3 = -5$$

$$\therefore [v]_s = (3, -2, -5)$$