

الحلقات

الفصل الثاني

المحاضرة الخامسة

م.م. احمد طه احمد

Types of Ideals النواع المثالية

idempotent

(1) مساوي القوى

العنصر (a) في الحلقة $(R, +, \cdot)$ يسمى مساوي القوى

إذا كان $a^2 = a$

$$\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, \dots, 11\}$$

مثال: الحلقة $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12}, \cdot_{12})$

$$4^2 = 4 \Rightarrow 4 \in \mathbb{Z}_{12}, 4 \text{ مساوي القوى}$$

* — * — * — * — * — * — * — *

"NilPotent"

(2) عديم القوى

تتكون $(R, +, \cdot)$ حلقة، والعنصر $a \in R$ يسمى ~~عديم~~ عديم القوى

إذا وفقط إذا $a^n = 0$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$

مثال/ الحلقة $(\mathbb{Z}_8, +_8, \cdot_8)$

$$2^3 = 0, 3 \in \mathbb{Z}^+$$

$\therefore 2 \in \mathbb{Z}_8$ عديم القوى

$$4^2 = 0, 2 \in \mathbb{Z}^+$$

$\therefore 4 \in \mathbb{Z}_8$ عديم القوى

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R = (M_2(\mathbb{R}), +, \cdot) \text{ مثال}$$

$$I^2 = I \cdot I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore I^2 = 0 \Rightarrow I \text{ عدمية القوى}$$

* * * * *

(3) عديم الجذور "Nilradical"

ليكن $(I, +, \cdot)$ فثاني للحلقة $(R, +, \cdot)$ يتكون I عديم الجذور ويرمز له بالرمز \sqrt{I} اذا كان

$$\sqrt{I} = \{r \in R : r^n \in I, \forall n \in \mathbb{Z}^+\}$$

تعريف اخر:

في الحلقة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ اذا كانت $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$

حينئذ $k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{Z}$ تكون (n) عدمية القوى اذا كانت

$$\sqrt{n} = p_1 \cdot p_2 \dots p_r$$

مثال/ ج عدمية الجذور (Nilradical) للعدد (8) في اكلية \mathbb{Z}

$$\sqrt{8} = 2^3, 3 \in \mathbb{Z} \quad \text{جذر الاس (3)}$$

$$\therefore \sqrt{8} = 2$$

$$\sqrt{12} = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2^2, 2 \in \mathbb{Z} \quad \text{مثال/ ج عدمية القوى للعدد (12) جذر الاس}$$

$$= 3 \cdot 2 = 6$$

Prime ideal

(4) المثالي الأولي

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ابدالية ، المثالي $(I, +, \cdot)$ لحلقة $(R, +, \cdot)$
 يسى مثالي اولي اذا كانت

$$a \cdot b \in I \Rightarrow a \in I \text{ او } b \in I, \forall a, b \in R$$

مثال / الحلقة $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12}, \cdot_{12})$ و $(I_{12}, +_{12}, \cdot_{12})$ مثالي حيث ان

$$I = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$6 = 3 \cdot 2, \quad 2 \in I, \quad 3 \in \mathbb{Z}_{12}$$

$$4 = 2 \cdot 2, \quad 2 \in I$$

$$10 = 5 \cdot 2, \quad 2 \in I, \quad 5 \in \mathbb{Z}_{12}$$

$\therefore I$ مثالي اولي

مثال / \mathbb{Z}_{18} حلقة بين ان
 مثالي اولي

$$\langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 6 \rangle, \langle 9 \rangle$$

$$\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6, \dots, 16\}$$

مثالي اولي

$$\langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, \dots, 15\}$$

مثالي اولي

$$\langle 6 \rangle = \{0, 6, 12\}$$

ليست مثالي اولي

$$\langle 9 \rangle = \{0, 9\}$$

ليست مثالي اولي