اعداد

م.م. احمد محمد خضر   م.م. عبير ابراهيم اعشوي

المحاضرة الاولى

المنطق الرياضي Mathematical Logic

المنطق الرياضي

يعرف المنطق الرياضي أو (الرمزي) بأنه نظام رمزي للمنطق الاستدلالي يقوم بتوظيف الرموز المجردة لمظاهر عديدة في اللغة الطبيعية، بأعتماده المفاهيم والتقنيات الموجودة في الرياضيات فعلى وجه الخصوص تعُد دراسة نظرية المجموعات (set Theory) والتي تعدّ أحد اقسام المنطق الرياضي وأساساً في الرياضيات ومدخلاً مهماً فيه، وتؤرخ الموسوعة للمنطق الرياضي من جورج بول ودي مورغان في منصف القرن التاسع عشر وتطور بشكل كبير عند كلٍ من وسمي المنطق الرياضي بهذا الاسم بسبب جذوره، فقد كان منذ تأسيسه مرتبطاً بالرياضيات، والتي يعدّ هذا المنطق مدخلاً لها، فضلاً عن أن هناك تشابهاً في الصيغ المنطقية ومثيلاتها بين المنطق الرياضي وعلم الرياضيات، ذلك أن المناطقة صرحوا أن الرياضيات ليست سوى جزءاً من المنطق، على إعتبار إن المنطق يتعامل مع الموضوعات، بخلاف الرياضيات التي تتعامل مع الكم والارقام. ويطلق على المنطق الرياضي تسميات عدة منها: اللوجستيك (logistic) وجبر المنطق (Algebraic logic) والمنطق الرمزي (symbolic logic) أو المنطق الشكلي (formal logic)، وإن أحدث تسمية له هي المنطق الرياضي (Mathematical logic)، الذي هو مجموعة من النظريات المنطقية التي وضعت في القرن التاسع عشر بمساعدة المفهوم الصناعي والمنهج الاستدلالي الصارم.

إنَّ مصطلح (logistics) ليس غريبا عند الرياضيين فهو يعني الحساب عند القدماء، وبصورة ادق يعني تلك الجداول ذات النفع المادي التي يتداولها المساحون والحاسبون قديما ليجدوا فيها نتائج العمليات الحسابية المختلفة جاهزة ومعدة دون تكبدالمشقة في أجرائها (كجدول اللوغارتمات).

ومما تقدم عدَّ المنطق الرياضي فرعاً من فروع الرياضيات، وبالتحديد الرياضيات المحضة (pure mathematics)، أو يطلق عند بعض الباحثين (metalogic)، وهذا المصطلح الاخير ذُكر في كتب

ديفيد هلبرت,وهي دراسة لما بعد نظرية المنطق، فبينما يُدرس المنطق السلوك أو الطريقة التي يبني بها النظام المنطقي للصدق وللقضايا واشتقاقاتها بأستعماله للنظام المنطقي، تَدْرس نظرية مابعد المنطق خصائص هذا النظام ونوعه.

أما الرياضيات المحضة فهي العلم الذي يدرس المفاهيم المجردة الكلية وتسمى احيانا بالرياضيات التأملية (speculative mathematics)، وقد عدّت هذه الدراسة (المنطق الرياضي)أحد فروع الرياضيات من القرن الثامن عشر.

فضلاً عما تقدم يُعد المنطق الرياضي كما سنرى قريباً أيضاً من علم الحاسوب (computer science)، على أساس اعتماد علم الحاسوب على البناء المنطقي في بناء برامجه، وأيضاً في مكوناته المادية.

مما تقدم في هذا المبحث نستنتج أن المنطق ألرياضي جزء لا يتجزأ من الرياضيات على وفق رأينا، وليس جزءاً من الفلسفة كما يدعي بعض ممن عرضنا لهم آنفاً، إذ عدَّ المنطق الأرسطي مدخلا للفلسفة ودراستها، في حين عدَّ المنطق الرياضي مدخلاً للرياضيات وأساساً للحاسوب.

العبارات المنطقية Logical Statements

هي جملة خبرية ذات معنى واضح وتكون اما صائبة أو خاطئة ولا يمكن أن تكون صائبة وخاطئة في وقت واحد.

مثل:

2 x 3=6 عبارة صائبة (True) ويرمز لها T

5>7 عبارة خاطئة (False) ويرمز لها F

4+ 5 =10 عبارة خاطئة F

العدد 8 عدد أولي عبارة خاطئة F

العدد 6 يقبل القسمة على 3 عبارة صائبة T

الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
$\wedge$	اداة الربط (و)
$\vee$	اداة الربط (أو)
$\Leftrightarrow$	الاقتضاء باتجاهين
$\Leftarrow$	الاقتضاء باتجاه
$\leftarrow$	اداة الربط اذا كان .. فأن
$\leftrightarrow$	اداة الربط اذا وفقط اذا
$\exists$	التسوير الجزئي
$\forall$	التسوير الكلي

المنطق الرياضي هو ليس نظرية ولكنه لغة علمية متفق عليها بين علماء الرياضيات

العبارات المنطقية Logical Statements

في المنطق الرياضي نقسم الجمل الرياضية الى نوعين :-

أ- جملة لا تحمل الينا خبرا معينا.

ب- جملة تحمل الينا خبرا معينا (جملة خبرية).

وأن من مهام المنطق الرياضي هو معرفة ما اذا كانت الجملة الخبرية صائبة او خاطئة ولقد اتفقنا بأن الجملة الخبرية تسمى عبارة منطقية اما صائبة او خاطئة ولايمكن ان تكون صائبة او خاطئة في آن واحد

ولقد علمت انه اذا رمزنا لعبارة منطقية بالرمز P وكانت P خاطئة F (False) فان نفي P تكون صائبة T (True) .

العبارة البسيطة : هي العبارة التي تشمل خبرا واحدا . مثل: $2 + 3 = 7$, $5 > 3$, $(4)^2 = 16$

العبارة المركبة : وهي العبارة التي تحمل خبرين أو اكثر. مثل :

1) $(3)^2 = 9 \;\; \mathrm{OR} \;\; x.x^2 = x^3$

2) اذا كان المثلث متساوي الاضلاع فان زواياه متساوية

نفي العبارة المنطقية

اذا كانت العبارة (P) خاطئة فأن نفيها صائبة . وبالعكس

P	P~
F	T
T	F

ومن المفيد أن نذكر جدولي الصواب لأداتي الربط و (^) , او (V)

P	Q	$Q \wedge P$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

أداة الربط: (اذا كان ... فان)[If...then]

هي اداة تستخدم لتكوين العبارة المركبة ويرمز لها $\longrightarrow$ وهي اداة شرطية اذا كانت Q , P عبارتين منطقيتين فأنه يرمز للعبارة المركبة لهما بالرمز Q $\longrightarrow$ P وتقرأ (اذا كان P فان Q)

والجدول التالي يوضح عمل هذه الأداة:

P	Q	$P \longrightarrow Q$
T	**T**	T
T	**F**	F
F	**T**	T
F	**F**	T

❖ في هذه الأداة تكون القيم جميعها (صائبة) ماعدا اذا كانت المقدمة (صائبة) والتالية (خاطئة) فقط

مثال / اذكر قيم الصواب العبارات الاتية :

1- اذا كان $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ فان $\sqrt{-2} \in R$

الحل / العبارة صائبة لان المقدمة صائبة والتالية صائبة أيضاً.

2- اذا كان 3+5 =8 فان 2+6=7

الحل / العبارة خاطئة لان المقدمة صائبة والتالية خاطئة.

3- اذا كان 5+7=11 فأن 6+2=8

الحل / العبارة صائبة لان المقدمة صائبة والتالية صائبة.

4- اذا كان Zero =1 فأن $\sqrt{3}$ عدد نسبي

الحل/ العبارة صائبة لان المقدمة خاطئة والتالية صائبة.

اداة الربط : (اذا وفقط اذا) [If and only If]

هي اداة شرطية ثنائية ورمزها $\longleftrightarrow$ وتكون العبارة المركبة $Q \longleftrightarrow P$ صائبة عندما تكون العبارتين المركبتين لهما صائبتين معا أو خاطئتين معاَ.

هذه العبارة المركبة تسمى (عبارة شرطية ثنائية) فمثلا المثلث المتساوي الأضلاع قياس زواياه متساوية وكذلك اذا كانت قياسات زوايا المثلث متساوية كان المثلث متساوي الاضلاع.

هذه العبارة المركبة هي $(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$ ويرمز لها بالرمز $Q \longleftrightarrow P$ او $P \longleftrightarrow Q$

وتقرأ (P اذا وفقط اذا Q) او (Q اذا وفقط اذا P) والجدول التالي يوضح عمل الأداة المركبة $Q \longleftrightarrow P$

P	Q	$P \longrightarrow Q$	$Q \longrightarrow P$	$(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$ $P \longleftrightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

❖ اي ان $Q \longleftrightarrow P$ تكون صائبة في حالتين هما: اذا كانت كل من العبارتين المركبتين اما صائبتين او خاطئتين معا.

مثال / أ- $x = -1 , x = 4 \leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

ب- $x^5 = -32 \leftrightarrow x = -2$

الاقتضاء impaction

عندما تكون اداة الربط ➡ صائبة دائما فتكتب $Q \Longrightarrow P$ (P تقتضي Q)ستوضح معنى الاقتضاء من خلال الحالتين الآتيتين :

الحالة الأولى / الاقتضاء في اتجاه واحدة والذي يرمز له $\Longrightarrow$ لنرمز (x=3) بالرمز P ولنرمز$(x^2 = 9)$ بالرمزQ

فاذا كانت X= 3 صائبة فان هذا يقتضي ان تكون $(x^2 = 9)$ اي $Q \Longrightarrow P$

اما اذا كانت $(x^2 = 9)$ فان $X = 3$ أي : $Q \not\Rightarrow P$

الحالة الثانية / عندما تكون اداة الربط $\Leftrightarrow$ صائبة فتكتب $P \Leftrightarrow Q$ وهذا لايتم الا اذا كانت العبارتين صائبتين معا أو خاطئتين معا.

الاقتضاء في اتجاهين متعاكسين والذي يرمز له $\Leftrightarrow$ لنرمز $(X=3)$ بالرمز P ولنرمز $(^3 = 27)$ بالرمز Q

فاذا كانت $X=3$ صائبة فان هذا يقتضي ان تكون $(x^3 = 27)$ أي : $p \Rightarrow Q$

واذا كانت $(x^3 = 27)$ صائبة فان هذا يقتضي ان تكون $X= 3$ أي: $Q \Rightarrow P$

ان $(Q \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow Q)$ يعني ان $Q \Leftrightarrow P$

مثال / اختر احد الرمزين $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ لوضعه بين التعبيرين في الحالات الاتية لتصبح العبارة صحيحة :-

1- $x = 2 , x^3 = 8$

2- $x > 2 \ , x > 5$

3- $x^2 \geq 0 , x \leq 0$

4- p : أ ب ج د شكل رباعي قطراه متناصفان , Q أ ب ج د متوازي اضلاع

الحل / 1- $x = 2 \Leftrightarrow x^3 = 8$

2- $x > 2 \Leftarrow x > 5$

3- $x^2 \geq 0 \Leftarrow x \leq 0$

4- $Q \Leftrightarrow p$