اعداد

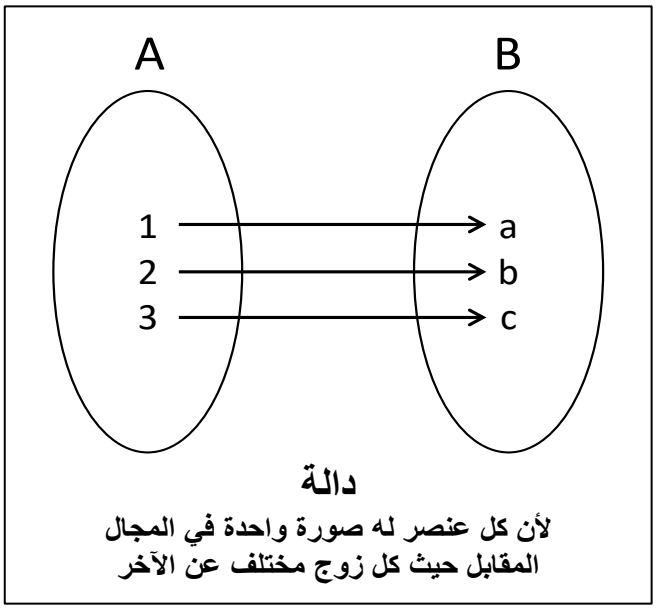
م.م. احمد محمد خضر  م.م. عبير ابراهيم اعشوي

# المحاضرة العاشرة

# المنطق الرياضي Mathematical Logic

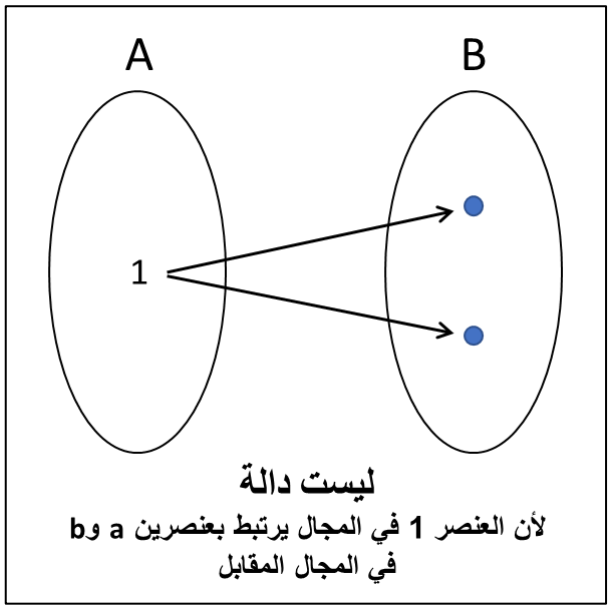
## الدوال الحقيقية

مفهوم الدالة/ إذا كانت العلاقة من مجموعة (A) إلى المجموعة (B) حيث كل عنصر من المجموعة (A) له صورة واحدة في المجموعة (B) أي أن كل زوج يظهر لنا مرة واحدة.




دالة

لأن كل عنصر له صورة واحدة في المجال المقابل حيث كل زوج مختلف عن الآخر




ليست دالة

لأن العنصر 1 في المجال يرتبط بعنصرين a و b في المجال المقابل

التعبير الرياضي للدالة: حيث يعبر عن الدالة بالصيغة الرمزية الآتية:

$f: A \longrightarrow B$ حيث يقرأ (f دالة من A إلى B)

$\forall x \in A$ ، يوجد $y = f(x) \in B$ حيث

1) إذا كان الزوج المرتب (x,y) ينتمي إلى بيان الدالة (f).

$f(x) = x \longrightarrow y$ حيث (y) هو صورة العنصر x تحت تأثير الدالة (f).

2) تتعين الدالة من ثلاث مكونات وهي:

a) المجال: وتمثله المجموعة (A) وهي المجموعة التي ينتمي إليها المتغير (x) إذا كان (x,y) ينتمي إلى بيان الدالة (f).

b) المجال المقابل: وتمثله المجموعة (B) وهي المجموعة التي ينتمي إليها المتغير (y) إذا كان (x,y) ينتمي إلى بيان الدالة (f).

c) قاعدة الدالة f: هي العلاقة التي تربط عناصر (A) بعناصر (B) أي أن y=f(x).

3) تعطى قاعدة الدالة بإحدى الطريقتين الآتيتين:

a) ذكر بيان الدالة $f: A \longrightarrow B$ وهذا يعني أنها تكتب على شكل أزواج مرتبة

$$f(x) = \{(x, y): y = f(x),\ x \in A\}$$

b) أو يذكر المعادلة التي تقوم بربط المتغير (x) بالمتغير (y).

## الدوال الحقيقية

تسمى الدالة $f: A \longrightarrow B$ دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها (A) ومجالها المقابل (B) هما مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقية (R).

حيث R ⊇ المجال المقابل، المجال $= \{x: x \in R, f(x) \in R\}$

**أوسع مجال للدالة f في R:**

هو مجموعة الأعداد الحقيقية المنتمية إلى (A) والتي يكون عندها f(x) E R

ملاحظة مهمة ((عندما تعطى قاعدة دالة ويطلب تحديد مجالها، فإن المجال سيكون أوسع مجال ممكن في R))

## أوسع مجال للدالة

أولاً / إذا كانت الدالة f(x) كثيرة الحدود فإن أوسع مجال للدالة هو R.

مثال1/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = 3x^2 + 7$

الحل/ أوسع مجال للدالة هو R (لأن الدالة كثيرة الحدود)

مثال2/ عين مجال للدالة f (أوسع مجال للدالة) إذا كانت $f(x) = x^2$

الحل/ ∵ $x^2$ معرفة دوماً في R مهما كانت x ∈ R

∴ أوسع مجال للدالة هو R أي مجال f = R

كيف نتعرف على الدوال الكثيرة الحدود (ما هي مواصفاتها)

a- مجال الدالة فيها ومجالها المقابل = R (أو مجموعة جزئية من R).

b- قاعدة الدالة تتكون من حد واحد أو عدة حدود.

c- أن أس (x) في أي حد من حدود الدالة يكون عدد طبيعي.

## صور الدوال الكثيرة الحدود

**(a) الدالة الثابتة:** حيث f(x)=a، (حيث a عدد ثابت) فإن $a \in R$.

تمثله كل الدوال الثابتة: $f(x) = 17$ , $f(x) = \sqrt{3}$ , $f(x) = -8$

**(b) الدالة الخطية:** حيث f(x)==ax+b $[a , b , c \in R , a \neq 0]$

أمثلة على الدالة الخطية: $f(x) = \sqrt{2}x + 12$ , $f(x) = 6x + 11$

**(c) الدالة التربيعية:** حيث $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a , b , c \in R, a \neq 0)$

أمثلة على الدوال التربيعية: $f(x) = 9x^2 - 4$ , $f(x) = 3x^2 + 5x - 5$

**(d) الدالة التكعيبية:** مثل $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$

**ثانياً /** إذا كانت الدالة كسرية (مكونة من بسط ومقام) فإن أوسع مجال للدالة هو R ما عدا الأعداد التي تجعل المقام = صفر

**مثال3/** أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$

الحل/ نجعل المقام مساوياً للصفر $\leftarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

نقوم بتحليل المعادلة بواسطة التجربة $\leftarrow (x - 3)(x - 2) = 0$

إيجاد قيم (x) التي تجعل المقام مساوياً للصفر $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ اما

او $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

∴ أوسع مجال للدالة f هو $R / \{2,3\}$

**ثالثاً /** إذا كانت الدالة تحتوي جذر دليله زوجي فإن أوسع مجال للدالة يستخرج كما يلي:

**(a)** إذا كانت الدالة تحتوي جذر دليله زوجي والجذر في البسط تحديداً، فإن أوسع مجال للدالة هو R ما عدا العدد الذي يجعل القيمة التي تحت الجذر ≤ صفر.

**مثال4/** أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \sqrt{x + 7}$ ← الدليل وهو زوجي

الحل/ ∵ الدالة دليلها زوجي (تربيعي)

∴ الجذر يقع في البسط

$$x + 7 \geq 0$$
$$x \geq -7$$

∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in R , x \geq 7\}$

**(b)** إذا كانت الدالة تحتوي على جذر دليله زوجي والجذر يقع في المقام تحديداً، فإن أوسع مجال للدالة هو R ما عدا الأعداد التي تجعل القيم التي تحت الجذر التربيعي > صفر.

**مثال5/** أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+6}}$

الحل/ ∵ الدالة دليلها زوجي (تربيعي) والجذر يقع في المقام

$$3x + 6 > 0$$
$$3x > -6$$

$$\frac{1}{3} \times 3x > \frac{1}{3} \times -6^2$$
$$x > -2$$

∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in R , x > -2\}$

رابعاً / إذا كانت الدالة تحتوي جذر دليله فردي وكان الجذر في البسط تحديداً، فإن أوسع مجال للدالة هو R.

مثال6/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \sqrt[5]{x-4}$

الحل/ ∵ الجذر في البسط ودليله فردي وهو (5). ∴ أوسع مجال للدالة هو R.

خامساً / إذا كانت الدالة تحتوي جذر دليله فردي وكان الجذر في المقام فإن أوسع مجال للدالة هو R ما عدا الأعداد التي تجعل المقام يساوي صفر.

مثال7/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x-5}}$

الحل/ $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

∴ أوسع مجال للدالة هو R / {5}.

مثال8/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{1}{3x+5}$

الحل/ $3x + 5 = 0$

$$3x = -5$$
$$x = \frac{-5}{3}$$

∴ أوسع مجال للدالة هو $R / \left\{\frac{-5}{3}\right\}$.

مثال9/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \sqrt{x}$

الحل/ $x \geq 0$

∴ أوسع مجال للدالة f هو $\{x : x \in R , x \geq 0\}$

مثال10/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

الحل/ $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

∴ أوسع مجال للدالة هو R / {1}.

## التمثيل البياني للدوال الحقيقية

الجدول الآتي لبعض الدوال المرتبة:

تمثيل الدالة $a,b \in R , a \neq 0 , f(x) = ax^2+b$

هذه الدالة يمثلها قطعا مكافئا راسه النقطة (0,y) ويكون بشكل:

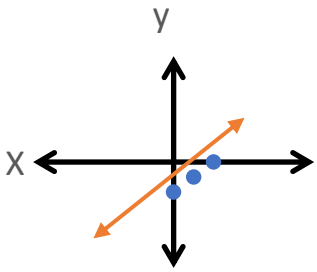
U بيانها يقع في النصف الأعلى من المستوى الإحداثي

∩ بيانها يقع في النصف الأسفل من المستوى الإحداثي

## أولاً / تمثيل الدالة الخطية:

$f : R \longrightarrow R$ حيث $f(x) = ax + b$ حيث $a , b \in R$ لتمثيل هذه الدالة نأخذ نقطتين (على الأقل) من مجال الدالة ونجد $f(x)$ لكل نقطة ونعين الأزواج المرتبة $(x,f(x))$ في المستوى الديكارتي ونصل بينهما بمستقيم.

**مثال1/** مثل الدالة $f: R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = x - 2$ بيانياً؟




الحل/ إن التمثيل البياني لهذه الدالة هو مستقيم
فعندما x=1 مثلا فإن $y = f(1) = 1 - 2 = -1$
وعندما x=2 فإن $y = f(2) = 2 - 2 = 0$
وعلى ذلك فإن الزوجان المرتبطان a(1-1), b(2,0)
ينتميان إلى بيان الدولة وتعينان النقطتين a , b
ويكون المستقيم (ab) هو المستقيم المطلوب

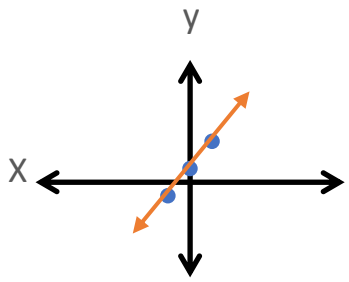
| x | y | (x,y) |
|---|---|---|
| 1 | -1 | (1,-1) |
| 2 | 0 | (2,0) |
| 0 | -2 | (0,-2) |

**مثال2/** مثل الدالة $f: R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = 2x + 1$ بيانياً؟
الحل/

$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$

$f(-1) = (2 \times -1) + 1 = -1$

| x | y | (x,y) |
|---|---|---|
| 1 | 3 | (1,3) |
| -1 | -1 | (-1,-1) |



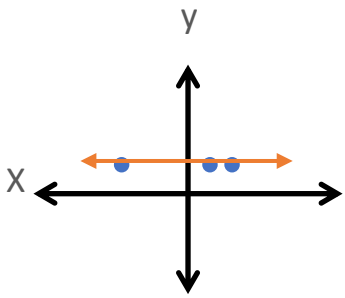

**مثال3/** مثل الدالة $f: R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = 2$ بيانياً؟
الحل/ تسمى هذه الدالة بالثابتة وتمثل مستقيماً يوازي محور السينات

$f(1) = 2$

$f(2) = 2$

$f(-3) = 2$

| x | y | (x,y) |
|---|---|---|
| 1 | 2 | (1,2) |
| 2 | 2 | (2,2) |
| -3 | 2 | (-3,2) |



## ثانياً / التمثيل البياني للدالة التربيعية:

لتمثيل مثل هذه الدوال نأخذ خمس قيم (على الأقل) لـ (x) من مجال الدالة ونجد f(x) لكل منها باستخدام قاعدة التعريف التالية:

**تعريف**

التمثيل البياني للدالة $f: R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = ax^2 + b$ حيث $a, b \in R$
وإن $a \neq 0$ وهي تمثل منحنياً وليس مستقيما

**مثال4/** مثل الدالة $f: R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = x^2$ بيانياً؟

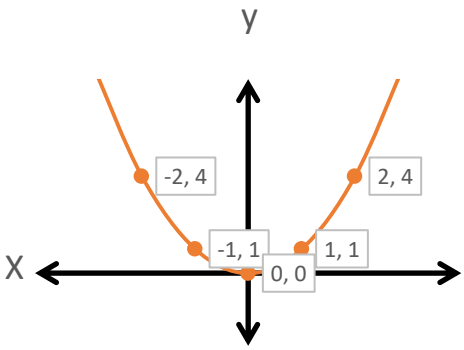
الحل/ نأخذ خمس قيم لـ (x) ونعوضها في $f(x) = x^2$

$f(1) = (1)^2 = 1$

$f(2) = (2)^2 = 4$

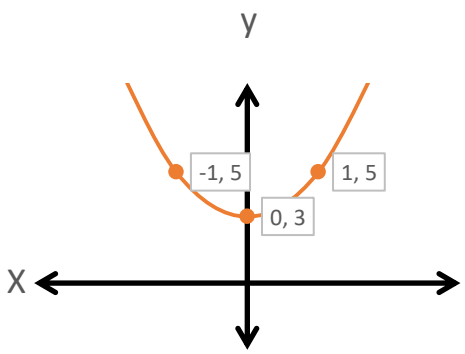
$f(-1) = (-1)^2 = 1$

| x | y | (x,y) |
|---|---|---|
| 2 | 4 | (2,4) |
| 1 | 1 | (1,1) |
| 0 | 0 | (0,0) |
| -1 | 1 | (-1,1) |
| -2 | 4 | (-2,4) |



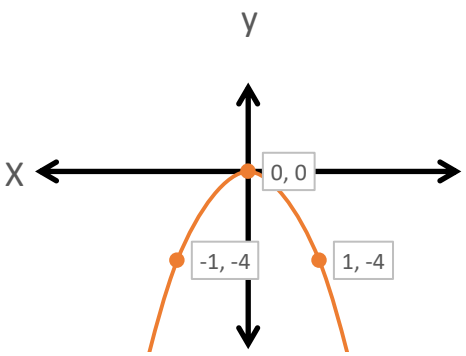

**مثال5/** مثل الدالة $f(x) = 2x^2 + 3$ بيانياً؟

| x | 1 | 0 | -1 |
|---|---|---|---|
| y | 5 | 3 | 5 |




**مثال6/** مثل الدالة $f(x) = -4x^2$ بيانياً؟

| x | 1 | 0 | -1 |
|---|---|---|---|
| y | -4 | 0 | -4 |



**مثال7/** مثل الدالة $f: R \longrightarrow R$

بحيث $y = x^2 + 3$ بيانياً؟

$y = (2)^2 + 3 = 7$

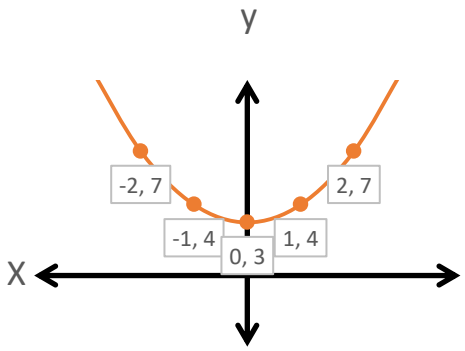
$y = (1)^2 + 3 = 4$

$y = (0)^2 + 3 = 3$

$y = (-1)^2 + 3 = 4$

$y = (-2)^2 + 3 = 7$

| x | y | (x,y) |
|---|---|---|
| 2 | 7 | (2,7) |
| 1 | 4 | (1,4) |
| 0 | 3 | (0,3) |
| -1 | 4 | (-1,4) |
| -2 | 7 | (-2,7) |




**مثال8/** مثل الدالة $f: R \longrightarrow R$

بحيث $y = 1 - x^2$ بيانياً؟

$y = 1 - (2)^2 = -3$

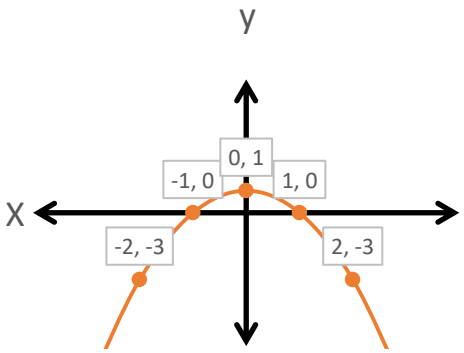
$y = 1 - (1)^2 = 0$

$y = 1 - (0)^2 = 1$

$y = 1 - (-1)^2 = 0$

$y = 1 - (-2)^2 = -3$

| x | y | (x,y) |
|---|---|---|
| 2 | -3 | (2,-3) |
| 1 | 0 | (1,0) |
| 0 | 1 | (0,1) |
| -1 | 0 | (-1,0) |
| -2 | -3 | (-2,-3) |

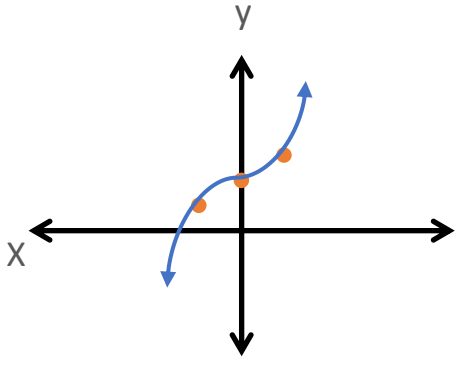



## ثالثاً / التمثيل البياني للدالة التكعيبية:

تمثيل الدالة $f(x)=ax^3+b$ ، $a, b \in R, a \neq 0$

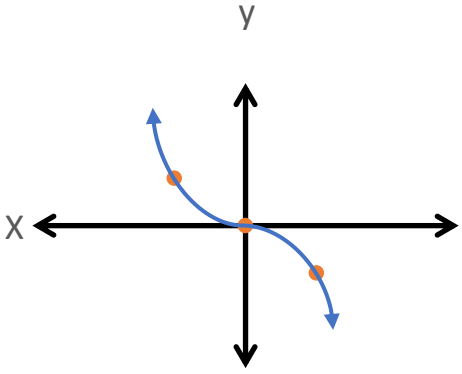
**مثال1/** مثل الدالة $f(x) = x^3 + 2$

| x | 1 | 0 | -1 |
|---|---|---|---|
| y | 3 | 2 | 1 |




**مثال2/** مثل الدالة $f(x) = -x^3$

| x | 1 | 0 | -1 |
|---|---|---|---|
| y | -1 | 0 | 1 |



## رابعاً / تمثيل الدالة $f_a(x) = a^x$

لقد تعرفنا على الرمز $a^x$ حيث كان الأس عدداً نسبياً، ورأينا أن قوانين الأسس في حالة كون الأس عدداً صحيحاً، بقيت نفسها عندما أصبح الأس عدداً نسبياً.
وإذا كان a عدداً حقيقياً موجباً $(a \neq 1)$، وكان x عدداً حقيقياً فالرمز $a^x$ يدل على قوة العدد (أسها x وأساسها a).

### تعريف

إذا كان $x \in R$ ، $a \in R^+/\{1\}$ وكان $f(x) = a^x$

فإن f(x) تسمى الدالة الأسية للأساس a (Exponential Function)

فمثلاً / $f_2(x) = 2^x$ , $g_3(x) = 3^x$ , $h_{\sqrt{5}}(x) = (\sqrt{5})^x$ , $f_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

---

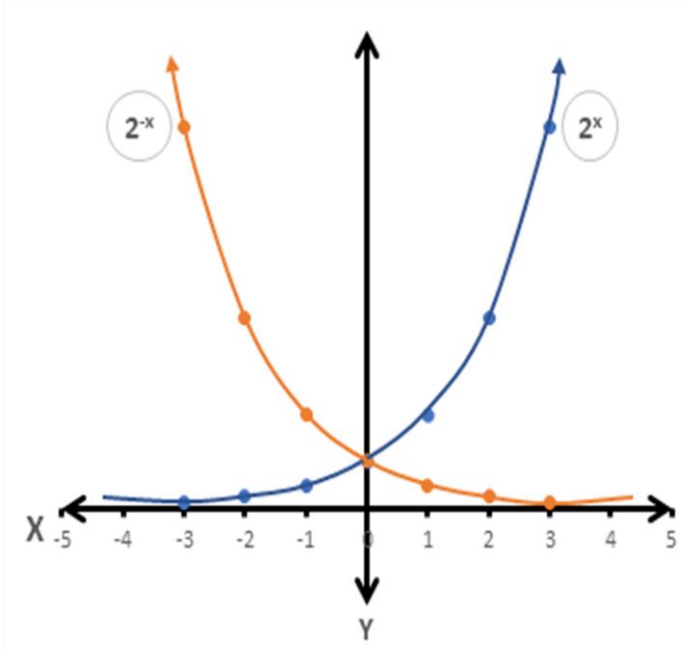
**مثال9/**

(أ) جد قيم الدالة $f(x) = 2^x$ من أجل $x = 3 , 2 , 1 , 0 , -1 , -2 , -3$ ، ثم استفد من ذلك في رسم جزء من منحني هذه الدالة.

(ب) ابحث عن طريقة للإفادة من المنحني السابق في رسم جزء من منحني هذه الدالة $f_{\frac{1}{2}}(x)$ على الشكل نفسه.

الحل/ (أ) $f(x) = 2^x$

| x | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 | -3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^x$ | 8 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |




(ب) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x} = f(-x)$

ولنفرض $R_y$ تناظر بالنسبة لمحور الصادات

$R_y : (x,y) = (-x,y)$

أي أن صورة $(x , 2^x) = (-x,2^x)$

لذلك فإننا نحصل على منحني لدالة $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ من المنحني $f(x) = 2^x$

بالتناظر حول محور الصادات كما موضح في الشكل (3-1)

## بعض خصائص الدالة الأسية $f(x) = a^x$

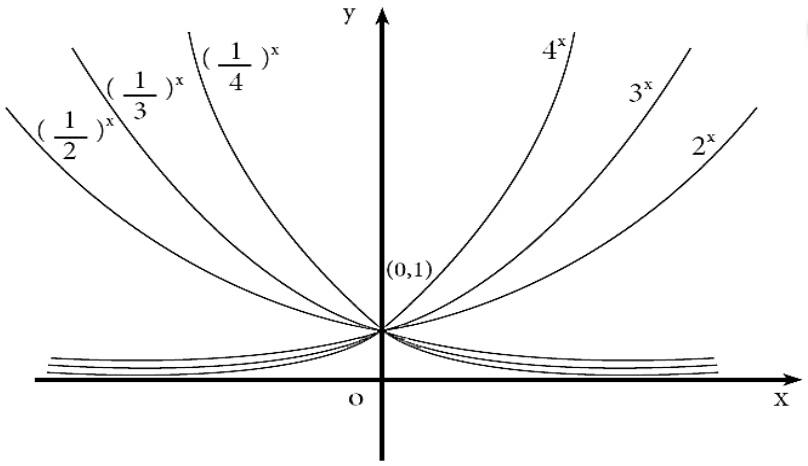
(1) إذا قمنا برسم منحنيات الدوال: $2^x, 3^x, 4^x, 5^x, \ldots\ldots$

وكذلك الدوال: $\left(\frac{1}{2}\right)^x, \left(\frac{1}{3}\right)^x, \left(\frac{1}{4}\right)^x, \left(\frac{1}{5}\right)^x, \ldots\ldots$

فسوف نجد مجموعتين من المنحنيات:

**الأولى:** عندما $a > 1$ حيث تتزايد قيم الدالة $a^x$ كلما تزايدت قيمة x.

**الثانية:** عندما $0 < a < 1$ حيث تتناقص قيم الدالة $a^x$ كلما تزايدت قيمة x.




وقد رسمنا في الشكل (2-3) ستة من المنحنيات (رسم جزء من كل منحني) ثلاثة فيها $a > 1$ وثلاثة أخرى فيها $0 < a < 1$ وقد اخترنا قيم a في هذه الأخيرة مقلوب قيم a في الثلاثة الأولى ونلاحظ أن جميع هذه المنحنيات تمر بالنقطة (0,1).

(2) بالرجوع إلى المنحني البياني لأية دالة أسية $a^x$، $a \neq 0$ نجد أن مجالها R.

---

**س/ إضافي/** جد مجال كل من الدوال التالية:

أ) $f(x) = x^3 + x^2 - 3$

الحل/

∵ الدالة كثيرة الحدود

∴ أوسع مجال للدالة هو R

ب) $f(x) = \frac{2x+6}{x^2-x-6}$

الحل/

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x-3)(x+2) = 0$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

او $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

∴ مج = S= {3,-2}

∴ أوسع مجال للدالة هو R/{3,-2}

جـ) $f(x) = \sqrt{4 - x}$

الحل/

$4 - x \geq 0$

$-4 + 4 - x \geq 0 - 4$

$[-x \geq -4] \times -1$

$x \leq 4$

∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in R, x \leq 4\}$

د) $f(x) = \sqrt{x + 2}$

الحل/

$x + 2 \geq 0$

$x + 2 - 2 \geq 0 - 2$

$x \geq -2$

∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in R, x \geq -2\}$