اعداد

م.م. احمد محمد خضر　　　م.م. عبير ابراهيم اعشوي

المحاضرة الرابعة

المنطق الرياضي Mathematical Logic

العبارات المسورة Quantifiered Propositions

العبارات المسورة كلياَ والعبارات المصورة جرئياَ

يحاول المنطق الرياضي عندما يكون ذلك ممكنا الاستعاضة عن الكلمات برموز متفق عليهاوسنقدم هنا رمزين منطقيين هامين:

اولا / العبارات المصورة كليا : في الجملة المفتوحة التي يسبقها $\forall$ أو مهما كان بحيث يجعل الجملة عبارة صائبة

اذا اردنا أن نذكر ان كل عنصر من مجموعة A يجعل F(X) عبارة صائبة فاننا نقول:

(مهما كان a من A فان F(a) عبارة صائبه).

او (لكل $a \in A$ يكون F(a) عبارة صائبة) ويكتب هذا القول بشكل رمزي مختزل على النحو التالي :

$a \in A$ فان (Fa) عبارة صائبة

يسمى الرمز $\forall$ سورا كليا (دلالة الشمول) او المسور الكلي وتسمى العبارة $\forall\, a \in A$ فان (Fa) عبارة صائبة

مثلا / $(x+1)^2=x^2+2x+1$ صائبة لكل عدد طبيعي يوضع مكان x .

ويمكن كتابتها كما يلي :- $\forall\, X \in N$ فأن $(x+1)2 = x2 + 2x + 1$

ملاحظة :- المتطابقة هي عبارة مسورة كليا أي انها صائبة لكل X ينتمي الى مجموعة التعويض .

مثلاً / $x^3+27=(x-3)(x^2-3x+9)$, $x^2-9=(x-3)(x+3)$

ثانياً / العبارات المسورة جرئيا : اذا اردنا أن نذكر ان بعض عناصر مجموعة A تجعل G(x) عبارة صائبة فاننا نقول:

(يوجد في الاقل عنصر من A يجعل G(x) عبارة صائبة)

وتكتب هذا الكلام بشكل رمزي كالاتي :

$\exists\, b \in A$ بحيث $G(b)$ عبارة صائية (دلالة الوجود)

يسمى الرمز $\exists$ سورا جزئيا وتسمى العبارة $\exists\, b \in A$ فأن $f(b)$ عبارةمسورة جزئياً .

فاذا اردنا مثلا ان نقول ان للمعادلة $X+1=2$ حلا في مجموعة الأعداد الصحيحة Z كتبنا:

$\exists\, X \in Z$ بحيث $X+1=2$

ونذكر ما تقدم بقولنا : (يوجد في الاقل عنصر $X \in Z$ بحيث تكون المعادلة $X+1 = 2$ محققة)

ملاحظة / المتطابقة هي عبارة مسورة كليا أي انها صائبة لكل X ينتمي الى مجموعة التعويض.

مثل: $X^2-9 =(X-3)(X+3)$, $X^3+27=(X-3)(X^2-3X+9$

ملاحظة / المعادلة والتباينة هي عبارات مفتوحة مسورة جزئيا اي انها صائبة لقيم محددة للمتغير من مجموعة التعويض

مثال : $X - 2 = 0 \rightarrow X = 2$ فالعدد (2) فقط يحقق هذه المعادلة ويجعلها صائبة .

مثال : $X \in N$, $X<3$

$S=\{0,1,2\}$ هذه القيم فقط تحقق المتباينة

نفي العبارات المسورة

عندما نريد نفي العبارت المسورة ننتبه الى الاتي :

(ان كل عبارة يجب ان تتصف بواحدة وواحدة فقط من الصفتين : صائبة أو خاطئة) .

فلو اردنا مثلا نفي العبارة : (مهما يكن الوتر المرسوم في دائرة فان العمود النازل عليه من مركز هذه الدائرة ينصفه)

فاننا نقول : (يوجد في الاقل وتر واحد مرسوما في هذه الدائرة بحيث ان الحمود الشازل عليه من مركزها لا ينصفه)

واذا اردنا اثبات خطأ القول : (كل عدد طبيعي يقبل القسمة على 2 يقبل القسمة على 6)

فانه يكفي ان نبرهن صواب القول (يوجد في الاقل عدد طبيعي واحد يقبل القسمة على 2 ولا يقبل القسمة على 6)

$\sim[P(x)\text{فأن}\ \forall x \in X] \equiv \sim P(x)\ \text{فأن}\ \exists x \in X$
$\sim[P(x)\text{فأن}\ \exists\, x \in X] \equiv \sim P(x)\ \text{فأن}\ \forall x \in X$

مثال / انف كلا مما ياتي :

-1 $\forall x$ فأن P(x) حيث P(x) : اذا كان x عدداً طبيعيا فأن X>0

الحل / $\exists x$ فأن $\sim P(x) \equiv \sim[\forall x$ فأن $P(x)]$

$\sim P(x)$: $\exists x$ عدد طبيعي حيث $X \leq 0$

وبالكلام : يوجد عدد طبيعي اصغر أو يساوي صفراً .

-2 $\exists x$ فأن P(x) حيث ان :P(x): x عدد زوجي موجي

الحل / $\forall x$ فأن $\sim P(x) \equiv \sim[\exists x$ فأن $P(x)]$

$\sim P \wedge (x+3<5: \forall x \in R$

عدداً زوجيا فان x غير موجب وبالكلام : مهما يكن xعدد زوجياً فأن x غير موجب

-3 $P \vee \exists x \in R: x+3 \geq 5$

الحل / $\sim P \wedge (x+3<5: \forall x \in R$

-4 $\in R: (x+3)^2 = x^2+6x+9$

الحل / يكون نفيها $\exists x \in R : (x+3)^2 \neq x^2+6x+9$

-5 $\forall x \in N$ يقبل القيمة على 2 قبل االقسمة على 8 .

الحل / $\exists x \in N$ يقبل القسمة على 2 قبل القسمة على 8 .

-6 $\forall x \in N: x>0$

الحل / $\exists x \in N: x \leq 0$

ملاحظة / اذا كانت العبارة المسورة (صائبة) فأن نفيها (خاطئة) وبالعكس .

ملاحظة / اذا كانت العبارة المسورة كلياً (صائبة) فأن تسويرها الجزئي (صائبة)وبالعكس غير صحيح كما في المثالين

مثال / $\forall x \in R: x^2-4=(x-2)(x+2)$ وهي عبارة مسورة كلياً (صائبة)

$\exists x \in R: x^2-4=(x-2)(x+2)$ وهي عبارة مسورة جزئياً(صائبة)

مثال / $\exists x \in N: x>5$ هي عبارة مسورة جزئياً(صائبة)

$\forall x \in N: x > 5$ *هي عبارة مسورة كلياً (خاطئة)*

التحصيل الحاصل Tautology

اذا كان لدينا العبارة المنطقية P وكانت جميع الاحتمالات المنطقية لهذه العبارة صائبة فان P تسمى تحصيلا حاصلا.

مثال / لتكن P عبارة هل P V ~P تشكل تحصيلا حاصلاً ؟

الحل :-

P	~P	P V ~P
T	**F**	T
F	**T**	T

:. تشكل تحصيلا حاصلاً

ملاحظة / اذا كان جميع قيم الصواب خاطئة تدعى تناقض (Contradiction)

اسئلة محلولة

س1/ انف كل عبارة من العبارات الاتية من دون استعمال ليس صحيحا بدلها

العبارة	نفيها
1) جميع المثلثات المتشابهة متساوية الساقين (خاطئة)	بعض المثلثات المتشابهة مختلفة الأضلاع (صائبة)
2) بعض المثلثات المتشابهة غير متطابقة (صائبة)	كل المثلثات المتشابهة متطابقة (خاطئة)
3) اذا كان المثلث قائم الزاوية فانه يكون متساوي الساقين (خاطئة)	يوجد في الاقل مثلث واحد قائم الزاوية وغير متساوي الساقين (صائبة)
4) بعض المعادلات ليس لها حل (صائبة)	كل المعادلات لها حل (خاطئة)
كل رباعي مستطيل (خاطئة)	يوجد في الاقل شكل رباعي واحد ليس مستطيل (صائبة)
6) $Q =: \forall X \in N \quad : x^2 = 25$	$\exists x \in N \qquad x^2 \neq 25$
7) $(\forall X \in R : x < 8) \wedge P$	$(\exists x \in R : x \geq 8) \vee \sim P$

س2/ بين صواب او خطأ لكل من العبارات التالية :

1) $\forall X$ فأن P(x) حيث ان :

P(x) : اذا كان x عددا طبيعيا فان $x^2=x$ — خاطئة

2) $\exists x$ فأن P(x) حيث ان :

P(x) : x عدد طبيعي , $x^2=x$ — صائبة

3) $\forall X$ فأن P(x) حيث ان :

P(x) اذا كان x عدداً سالبا فأن x^2 عدد موجب — صائبة

4) P,Q عبارتان منطقيتان $P \to Q \wedge Q$ تحصيل حاصل — صائبة

5) Pعبارة $P \wedge \sim P$ تناقض — صائبة

6) P,Qعبارتان منطقيتان $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$ تحصيل حاصل . — صائبة

اسئلة عامة

س 1 / برهن أن :

a) $\sim(\sim b \ \vee \ \sim c) \equiv \sim(\sim b) \ \wedge \ \sim(\sim c)$

b) $a \ \wedge \ (\sim a \vee b) \equiv a \ \wedge \ b$

c) $(b \ \vee \ \sim c) \ \rightarrow b \equiv (\sim b \ \wedge \ c) \qquad b$

س2 / جد مجموعة حلول العبارات المفتوحة التالية حيث $x,y \in N$:

a) $5x + y = 15$

b) $x + 5y = 15$

c) $3x + y = 8$

س 3 / جد مجموع حلول العبارات المفتوحة التالية :

a) $2x - 7 < 0$

حيث مجموعة التعويض 1) Z 2) {0,1,2,3} 3) Q

b) $(x>3) \ \wedge (\in \{x\ 3, 5, 7, 9, 11\}$

c) $(x<3) \ \wedge \ (x \in Z)$

d) $(2x-3>0) \wedge \ (\{x \in \{2, 4, 6\})$