اعداد

م.م. احمد محمد خضر م.م. عبير ابراهيم اعشوي

المحاضرة التاسعة

المنطق الرياضي Mathematical Logic

المعادلات الأسية البسيطة

حل المعادلات الأسية البسيطة

تتضمن المعادلات الأسية Exponential Equation متغير في الأس.

ولحل هذا النوع من المعادلات نحتاج الملاحظات الآتية:

1- في أي معادلة: ((إذا تساوت الأساسات فسوف تتساوى الأسس بشرط الأساس $\neq 1$))

2- إذا كان $x^n=y^n$ فإن $x=y$ إذا كانت n فردية، $x=\pm y$ إذا كانت n زوجية

3- إذا كان $x^n=y^m$ حيث $(m=n=0)$ والآن لاحظ حل كلاً من المعادلات الآتية:

أ- $(x+2)^{\frac{-3}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{27}} \Rightarrow (x+2)^{\frac{-3}{5}}=3^{\frac{-3}{5}}$

$$x+2=3 \Rightarrow x=1$$

$$\therefore \text{مج} = \{1\}$$

ب- $x^{\frac{1}{3}}=8 \Rightarrow x^{\frac{1}{3}}=2^3 \Rightarrow (x^{\frac{1}{3}})^3=(2^3)^3$

$$x=2^6 \Rightarrow x=512$$

$$\therefore \text{مج} = \{512\}$$

ج- $\sqrt[3]{x^2}=\frac{1}{9} \Rightarrow x^{\frac{2}{3}}=3^{-2} \Rightarrow \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=\pm(3^{-2})^{\frac{3}{2}}$

$$x=\pm 3^{-2} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{27}$$

$$\therefore \text{مج} = \{\pm\frac{1}{27}\}$$

مثال1/ حل المعادلة: $2^{x^2-2x+1} = 4^{x+3}$

الحل/

$2^{x^2-2x+1} = 2^{2(x+3)}$ نجعل الأساس نفسه في طرفي المعادلة

$\therefore x^2 - 2x + 1 = 2x + 6$ إذا تساوت الأساسات تساوت الأسس

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 5, x = -1$$

مجموعة الحلول = {-1,5}

وتسمى مثل هذه المعادلة بالمعادلة الأسية لأن الأسس متغيرة.

مثال2/ حل المعادلة: $3^{2x+1} - 4 \times 3^{x+2} = -81$

الحل/

$$[3^{2x} \times 3 - 4 \times 3^x \times 3^2 + 81 = 0] \div 3$$

$$3^{2x} - 12 \times 3^x + 27 = 0$$

$$(3^x - 3)(3^x - 9) = 0$$

أما $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$

أو $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

مجموعة الحلول = {1,2}

مثال3/ جد قيمة x إذا كان: (أ $3^{x-1} = 5^{x-1}$ **(ب** $(x+3)^5 = 4^5$ **(ج** $(x-1)^6 = 2^6$

الحل/

أ- بتطبيق ملاحظة (3) $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

ب- بتطبيق ملاحظة (2) $x + 3 = 4 \Rightarrow x = 1$

ج- بتطبيق ملاحظة (2) $x - 1 = \pm 2$

$x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$

$x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1$

S = {-1,3}

مثال4/ حل المعادلة في R حيث $8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}+\frac{1}{3}} + 8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}+\frac{2}{3}} = 14$

الحل/

$$8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}} \times 8^{\frac{2}{3}} = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}}\left(1 + 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{2}{3}}\right) = 14 \Rightarrow 8^{\frac{x}{2}}(1 + 2 + 4) = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}} \times 7 = 14 \Rightarrow 8^{\frac{x}{2}} = \frac{14}{7} \Rightarrow 8^{\frac{x}{2}} = 2$$

$$(2^3)^{\frac{x}{2}} = 2 \Rightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^1$$

$$\frac{3x}{2} = 1 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

اسئلة محلولة

س1/ حل كل من المعادلات الآتية:

1) $\sqrt[5]{x^3} = \frac{1}{27}$

$$x^{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3^3}$$

$$\left(x^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{3}} = (3^{-3})^{\frac{5}{3}}$$

$$x = 3^{-5}$$

$$x = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$$

2) $\left(\sqrt[5]{243}\right)^2 = \left(x^{\frac{-1}{2}}\right)^2$

$$(243)^{\frac{2}{5}} = x^{-1}$$

$$(3^5)^{\frac{2}{5}} = x^{-1}$$

$$3^2 = x^{-1}$$

$$9 = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

3) $(x+2)^{\frac{1}{2}} = 3$

$\sqrt{x+2} = 3$ بتربيع الطرفين

$$x + 2 = 9$$

4) $10^{(x-4)(x-5)} = 100$

$$10^{(x-4)(x-5)} = 10^2$$

$$(x-4)(x-5) = 2$$

$x = 9 - 2$

$x = 7$

$x^2 - 5x - 4x + 20 - 2 = 0$

$x^2 - 9x + 18 = 0$

$(x - 6)(x - 3) = 0$

$x = 6 \; or \; x = 3$

مجموعة الحل $S = \{(6,3)\}$

5) $-6 \times 5^x + 25^x + 5 = 0$

$25^x - 6 \times 5^x + 5 = 0$

$5^{2x} - 6 \times 5^x + 5 = 0$

$(5^x - 5)(5^x - 1) = 0$

$5^x - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

or $5^x - 1 = 0 \Rightarrow 5^x = 5^0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$\therefore S = \{1,0\}$

6) $6^{x^2-3x-2} = 36$

$6^{x^2-3x-2} = 6^2$

$x^2 - 3x - 2 = 2$

$x^2 - 3x - 2 - 2 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x - 4)(x + 1) = 0$

$x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 4}$

or $x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$

$S = \{4, -1\}$

7) $3^{(x^2+5x+4)} = 27^{(-x-4)}$

$3^{(x^2+5x+4)} = 3^{3(-x-4)}$

$x^2 + 5x + 4 = 3(-x - 4)$

$x^2 + 5x + 4 = -3x - 12)$

$x^2 + 8x + 16 = 0$

$(x + 4)(x + 4) = 0$

$x + 4 = 0$

$x = -4$

8) $2^{2x+3} - 57 = 65(2^x - 1)$

$2^{2x} \times 2^3 - 57 = 65 \times 2^x - 65$

$8 \times 2^{2x} - 65 \times 2^x - 57 + 65 = 0$

$8 \times 2^{2x} - 65 \times 2^x + 8 = 0$

$(8 \times 2^x - 1)(2^x - 8) = 0$

$8 \times 2^x - 1 = 0 \Rightarrow 8 \times 2^x = +1$

$2^x = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2^3} \Rightarrow 2^x = 2^{-3}$

$\boxed{x = -3}$

or $2^x - 8 = 0 \Rightarrow 2^x = 8$

$2^x = 2^3 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

مجموعة الحل $S = \{-3,3\}$

9) $5\left(5^x + 5^{-x}\right) = 26$

$5 \times 5^x + 5 \times 5^{-x} = 26$

$5 \times 5^x + 5 \times \frac{1}{5^x} = 26$

$5 \times 5^x \times 5^x + 5 \times 5^x \times \frac{1}{5^x} = 5^x \times 26$

$5 \times 5^{2x} + 5 = 26 \times 5^x$

$5 \times 5^{2x} - 26 \times 5^x + 5 = 0$

$(5 \times 5^x - 1)(5^x - 5) = 0$

$5 \times 5^x - 1 \Rightarrow 5 \times 5^x = 1$

$5^x = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^x = 5^{-1} \Rightarrow \boxed{x = -1}$

Or $5^x - 5 \Rightarrow 5^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$\therefore S = \{-1,1\}$

س2/ حل المعادلة في R: $3^{x+1} \times 9^{x} - 9^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{x}} = 0$

الحل/

$$3^{x} \times 3 \times 3^{2x} - 3^{2\times\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{x}} = 0$$

$$3^{3x} \times 3 - 3 \times 3^{\frac{3}{x}} = 0$$

$$\left[3^{3x} \times 3 = 3 \times 3^{\frac{3}{x}}\right] \div 3$$

$$3^{3x} = 3^{\frac{3}{x}} \Rightarrow 3x = \frac{3}{x} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \qquad \therefore S = \{1, -1\}$$

س3/ حل المعادلة التالية: $\frac{(243)^{x-1}\times(27)^{x-2}}{(729)^{\frac{1}{2}x}} = 81$

الحل/

$$\frac{(3^5)^{x-1} \times (3^3)^{x-2}}{(3^6)^{\frac{1}{2}x}} = 81 \Rightarrow \frac{3^{5x} \times 3^{-5} \times 3^{3x} \times 3^{-6}}{3^{3x}} = 81$$

$$3^{5x+\cancel{3x}-\cancel{3x}-5-6} = 3^4 \Rightarrow 3^{5x-11} = 3^4 \Rightarrow 5x - 11 = 4$$

$$5x = 4 + 11 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{5} \Rightarrow x = 3$$

س3/ جد قيمة $x \in R$ إذا علمت

(أ) $3^{x^2-1} + 3^{x^2} + 3^{x^2+1} = 39$

الحل/

$$3^{x^2} \times 3^{-1} + 3^{x^2} + 3^{x^2} \times 3 = 39$$

$$3^{x^2}\left(\frac{1}{3} + 1 + 3\right) = 39$$

$$3^{x^2}\left(\frac{1+3+9}{3}\right) = 39$$

$$3^{x^2} \times \frac{13}{3} = 39$$

$$\frac{3^{x^2} \times 13}{3} = \frac{39}{1}$$

$$3^{x^2} \times 13 = 117$$

$$3^{x^2} = \frac{117}{13}$$

$$3^{x^2} = 9$$

$$3^{x^2} = 3^2$$

$$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

(ب) $\frac{4^x+4(2^x)+3}{4^x+2^x} = 25$

الحل/

$$\frac{(2^2)^x + 4(2^x) + 3}{(2^2)^x + 2^x} = 25$$

$$\frac{2^{2x} + 4 \times 2^x + 3}{2^{2x} + 2^x} = 25$$

$$\frac{(2^x + 3)\cancel{(2^x + 1)}}{2^x\cancel{(2^x + 1)}} = 25$$

$$\frac{(2^x + 3)}{2^x} = 25$$

$$(2^x + 3) = 25 \times 2^x$$

$$\cancel{2^x} - \cancel{2^x} + 3 = (25 \times 2^x) - 2^x$$

$$+3 = (24 \times 2^x)$$

$$2^x = \frac{3}{24} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{8}$$

$$2^x = \frac{1}{2^3} \Rightarrow 2^x = 2^{-3}$$

$x = -3$ **إذا تساوت الأساسات تساوت الأسس**