الحلول العددية للمعادلات التفاضلية (الاعتيادية)

Numerical Solution for ordinary different Equation

طريقة رانج – كتا *Range-kutta method*

ان الدقة التي تعطيها هذه الطريقة في كل المسائل هي كدقة طريقة

أ- صيغة رانج – كتا ذات الرتبة (2)

الصيغة العامة لها هي

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k)$$

ب-صيغة رانج – كتا ذات الرتبة (4)

ان دقة ونتائج هذه الطريقة هي افضل من نتائج الصيغة السابقة وذلك لان متسلسلة تقطع بعد الحد الذي يحتوي h^4

ويضاف على هذه الطريقة بان تتطلب حساب قيمة $f(x, y)$ اربع مرات في كل خطوة و هذا سياخذ الكثير من الوقت وخاصة عندما تكون الدالة f متعددة

الصيغة العامة لها

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

مثال/ استخدم رانج – كوتا من الرتبة الثانية لحل المعادلة التفاضلية

$$y' = x - y$$

عندما $y(1)=1$ و ان $h=0.1$

الحل //

$$x_0 = 1 \quad , y_0 = 1$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.1(1-1) = 0$$

$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k) = 0.1f(1 + 0.1, 1 + 0) = 0.1(1.1 - 1) = 0.01$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1 + \frac{1}{2}(0 + 0.01) = 1.005$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$x_1 = x_0 + h = 1 + 0.1 = 1.1 \quad , \ y_1 = 1.005$$

$$k_1 = hf(x_1, y_1) = 0.1(1.1 - 1.005) = 0.1(0.995) = 0.0995$$

$$k_2 = hf(x_1 + h, y_1 + k) = 0.1f(1.1 + 0.1, 1.005 + 0.0995) = 0.1(1.2 - 1.1045)$$
$$= 0.00955$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1.005 + \frac{1}{2}(0.0995 + 0.00955) = 1.059525$$

مثال/ استخدم رانج – كوتا من الرتبة الرابعة لحل المعادلة التفاضلية

$$y' = x^2 - 2xy$$

عندما $y(1)=0$ و ان $h=0.2$

الحل //

$$x_0 = 1 \quad , y_0 = 0$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.2((1)^2 - 0) = 0.2$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k}{2}\right) = 0.2f\left(1 + \frac{0.2}{2}, 0 + \frac{0.2}{2}\right) = 0.2((1.1)^2 - 2(1.1)(0.1)) = 0.198$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0.2f\left(1 + \frac{0.2}{2}, 0 + \frac{0.198}{2}\right)$$
$$= 0.2((1.1)^2 - 2(1.1)(0.099)) = 0.1984$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.2f(1 + 0.2, 0 + 0.1984)$$
$$= 0.2((1.2)^2 - 2(1.2)(0.1984)) = 0.1928$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_1 = 0 + \frac{1}{6}(0.2 + 2(0.198) + 2(0.1984) + 0.1928) = 0.1976$$

$$x_1 = x_0 + h \quad = 1 + 0.2 = 1.2 \quad , y_1 = 0.1976$$

$$k_1 = hf(x_1, y_1) = 0.2((1.2)^2 - 2(1.2)(0.1976)) = 0.1932$$

$$k_2 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k}{2}\right) = 0.2f(1.3,0.2901) = 0.2((1.3)^2 - 2(1.3)(0.2942)) = 0.185$$

$$k_3 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0.2f(1.3,0.2901)$$
$$= 0.2((1.3)^2 - 2(1.3)(0.2901)) = 0.1871$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.2f(1.4,0.3847)$$
$$= 0.2((1.4)^2 - 2(1.4)(0.3847)) = 0.1766$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_2 = 0.1976 + \frac{1}{6}(0.1932 + 2(0.185) + 2(0.1871) + 0.1766)$$
$$= 0.3833$$

ايجاد y_3 , y_4 واجب