ثالثا: طريقة القاطع Secant Method

ان هذه الطريقة متشابهة الى طريقة الموقع الكاذب ، فكما في الطريقة السابقة نقرب منحني الدالة f(x) بواسطة خط القاطع محور x ولكن هذه الطريقة لانجد الحلول التكرارية في صفر الجذر (نظرية القيمة المتوسطة) ان تقارب هذه الطريقة غير مؤكد لكنها اذا تقاربت فان تقاربها يكون اشرع بكثير من الطرق السابقة .

الصيغة العامة لهذه الطريقة هي

$$x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{y_{i+1}\,(x_{i+1} - x_i)}{(y_{i+1} - y_i)} \qquad i = 1,2,\ldots$$

شروط التوقف ، نتوقف عن الحل اذا كان $|x_{i+1} - x_i| \le \varepsilon$ او $|y_{i+1}| \le \varepsilon$

طريقة الحل //

١- نجد y_i و y_{i+1}

٢- نرسم جدول من ثلاث حقول

i	x_i	y_i

٣- نتوقف عن الحل اذا كان $|x_{i+1} - x_i| \le \varepsilon$ او $|y_{i+1}| \le \varepsilon$

مثال ١// استخدم طريقة القاطع لحل المعادلة $f(x) = xe^x - 1$ للفترة *[0,1]* وبمقدار خطا $\varepsilon=0.05$.

الحل //

$x_1 = 0$, $y_1 = 0e^0 - 1 = -1$

$X_2 = 1$, $y_2 = 1e^1 - 1 = 1.718$

i	$x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{y_{i+1}\,(x_{i+1}-x_i)}{(y_{i+1}-y_i)}$	y_i
1	0.368	-0.468
2	0.503	-0.168
3	0.580	0.036

$$x_3 = x_2 - \frac{y_2\,(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)} = 1 - \frac{1.718(1-0)}{1.718+1} = 0.368 \quad , y_3 = -0.468$$

$$x_4 = x_3 - \frac{y_3\,(x_3 - x_2)}{(y_3 - y_2)} = 0.368 - \frac{0.468(0.368-1)}{-0.468+1.718} = 0.503 \quad , y_4 = -0.168$$

$$x_5 = x_4 - \frac{y_4\,(x_4 - x_3)}{(y_4 - y_3)} = 0.503 - \frac{-0.168(0.503-0.368)}{-0.168-0.468} = 0.580 \quad , y_5 = 0.036$$

نختبر شرط التوقف $|y_5| = 0.036<0.05$ اذن الجذر هو $x_5=0.580$

واجب// جد جذور المعادلة $f(x) = x^2 +2x - 1$ بطريقة القاطع للفترة *[0,1]* وبمقدار خطا $\varepsilon=0$.

رابعا: طريقة نيوتن رافسون Newten –Raphson's Method

تعد هذه الطريقة من الطرق المهمة وذات التقارب الدقيق ، لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق في $[a,b]$ ولتكن x_0 (القيمة الاولية للجذر) فان قيمة الجذر هو (حيث ان h قيمة التصحيح في قيمة x_0).

$X_1=x_0+h$

باستخدام صيغة تايلر عند النقطة x_0 $f(X_1)=f(x_0+h)$

$$f(X_1)= f(x_0)+h\frac{f'(x0)}{1!} + h^2\frac{f''(x0)}{2!} + h^3\frac{f'''(x0)}{3!} + \cdots$$

$$= f(x_0)+(x_1 - x_0)f'(x_0) + (x_1 - x_0)^2\frac{f''(x0)}{2!} + \cdots \quad h = (x_1 - x_0)$$

ليكن x_1 قريبة من الجذر بالنسبة الى x_0

$$f(x_0)+(x_1 - x_0)f'(x_0) + (x_1 - x_0)^2\frac{f''(x0)}{2!} + \cdots = 0$$

وكذلك فان x_1 تكون قريبة من x_0 فان $(x_1 - x_0)$ ذات قيمة صغيرة وعند تربيع $(x_1 - x_0)^2$ فان قيمة تكون اصغر وقريبة من الصفر او تساوي وكذلك الحال بالنسبة الى الدرجات العليا لـ $(x_1 - x_0)$ فيمكن اهمال القيم من القوى 2فما فوق اي ان

$f(x_0)+(x_1-x_0)f'(x_0)=0$

$(x_1-x_0)f'(x_0)=-f(x_0)$ => $x_1-x_0=\frac{-f(x0)}{f'(x_0)}$

$x_1=x_0-\frac{f(x0)}{f'(x_0)}$

$x_2=x_1-\frac{f(x1)}{f'(x_1)}$

فان الصيغة العامة لهذه الطريقة هي

$x_{i+1}=x_i-\frac{f(xi)}{f'(x_i)}$ $i=0,1,2,\dots$

طريقة الحل //

١- نكون جدول من خمس حقول

i	x_i	f(xi)	$f'(x_i)$	x_{i+1}

٢- لحساب x_{i+1} نستخدم القانون

$X_{i+1}=x_I-\frac{f(xi)}{f'(x_I)}$

٣- نتوقف عن الحل اذا كان $|x_{i+1}-x_i|\le\varepsilon$

ملاحظة // اذا اعطى فترة في السؤال فان $x_0=\frac{a+b}{2}$

مثال ١// جد جذور المعادلة $f(x)=X^3-X^2+2X-1$ بطريقة نيوتن رافسن للفترة *[0,1]* وبمقدار خطا $\varepsilon=0$

الحل //

$x_0=\frac{0+1}{2}=0.5$ => $f(x_0)=f(0.5)=0.125-0.25+1-1=-0.125$

$f'(x)=3X^2-2X+2$ => $f'(x_0)=f'(0.5)=0.75-1+2=1.75$

i	x_i	f(xi)	$f'(x_i)$	x_{i+1}
0	x_0=0.5	-0.125	1.75	x_1=0.57
1	x_1=0.57	0.0002	1.83	x_2=0.57

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x0)}{f'(x_0)} = 0.25 + \frac{0.125}{1.75} = 0.57$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x1)}{f'(x_1)} = 0.57 + \frac{0.002}{1.563} = 0.57$$

$|x_2 - x_1| = |0.57-0.57| = 0 = \varepsilon$

اذن الجذر هو x_2=0.57

واجب // استخدم طريقة نيوتن رافسون لحل المعادلة $f(x) = xe^x + x^2 - 5$

للفترة *[1,2]* وبخطأ $\varepsilon = 0.003$

خامسا. النقطة الصامدة The fixed point

تعد هذه الطريقة من الطرق ذات الدقة العالية في الوصول للجذر لتكن $f(x) = 0$ دالة مستمرة في الفترة [a,b] وتحتوي على جذر حقيقي في هذه الفترة فلايجاد قيمه الجذر بهذه الطريقة نتبع الخطوات الاتية .

١- نكتب المعادلة $f(x) = 0$ بالشكل $x = g(x)$

٢- نشتق $g(x)$ ومن ثم نحقق الشرط لكي نستمر في الحل $|g'(x)| < 1$ فاذا لم يتحقق الشرط نختار $g(x)$ اخرى

٣- نكون جدول من حقلين عندما n=0,1,2,…

n	
$x_{n+1} = g(x_n)$	

٤- نتوقف عن الحل اذا كان $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$

مثال // جد جذر المعادلة $f(x) = x^2 - x - 3$ بطريقة النقطة الصامدة على الفترة *[1,2]* وبخطا *ε=0.01*

الحل //

$$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$x^2 - x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = x^2 - 3$$

$$g'(x) = 2x \quad \rightarrow \quad |g'(x_0)| = |2 * 1.5| = 3 > 1$$ لايحقق

$$x^2 - x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = x + 3 \quad \rightarrow x = \sqrt{x+3}$$