خامسا. النقطة الصامدة The fixed point

تعد هذه الطريقة من الطرق ذات الدقة العالية في الوصول للجذر لتكن $f(x) = 0$ دالة مستمرة في الفترة [a,b] وتحتوي على جذر حقيقي في هذه الفترة فلايجاد قيمه الجذر بهذه الطريقة نتبع الخطوات الاتية .

١- نكتب المعادلة $f(x) = 0$ بالشكل $x = g(x)$

٢- نشتق $g(x)$ ومن ثم نحقق الشرط لكي نستمر في الحل $|g'(x)| < 1$ فاذا لم يتحقق الشرط نختار $g(x)$ اخرى

٣- نكون جدول من حقلين عندما n=0,1,2,…

n	
$x_{n+1} = g(x_n)$	

٤- نتوقف عن الحل اذا كان $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$

مثال // جد جذر المعادلة $f(x) = x^2 - x - 3$ بطريقة النقطة الصامدة على الفترة *[1,2]* وبخطا *ε=0.01*

الحل //

$$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$x^2 - x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = x^2 - 3$$

$$g'(x) = 2x \quad \rightarrow \quad |g'(x_0)| = |2 * 1.5| = 3 > 1$$ لايحقق

$$x^2 - x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = x + 3 \quad \rightarrow x = \sqrt{x+3}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \rightarrow |g'(x_0)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{1.5+3}}\right| = 0.23 < 1$$ الشرط تحقق

n	0	1	2	3
$x_{n+1} = g(x_n)$	2.12	2.26	2.29	2.3

$x_1 = g(x_0) = g(1.5)$=2.12

$x_2 = g(x_1) = g(2.12)$=2.26

$x_3 = g(x_2) = g(2.26)$= 2.29

$x_4 = g(x_3) = g(2.29)$=2.3

$$|x_4 - x_3| \leq |2.3 - 2.29| = 0.01 = \varepsilon$$

الجذر هو x_4 =2.3

مثال // جد جذر المعادلة $f(x) = x - e^{-x}$ بطريقة النقطة الصامدة وبخطأ ε=*0.05* حيث ان $x_0 = 3$

الحل //

$$x - e^{-x} = 0 \quad \rightarrow \quad x = e^{-x}$$

$$g'(x) = -e^{-x} \rightarrow |g'(3)| = |-e^{-3}| = 0.004 > 1$$ يحقق

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_{n+1} = g(x_n)$	0.04	0.96	0.38	0.68	0.50	0.60	0.54	0.58

$x_1 = g(x_0) = g(3)$=0.04

$x_2 = g(x_1) = g(0.04)$=0.96

$x_3 = g(x_2) = g(0.96)$=0.38

$x_4 = g(x_3) = g(0.38)$= 0.68

$x_5 = g(x_4) = g(0.68)$= 0.50

$x_6 = g(x_5) = g(0.50)$= 0.60

$x_7 = g(x_6) = g(0.60)$= 0.54

$x_8 = g(x_7) = g(0.54)$= 0.58

$$|x_8 - x_7| \leq |0.58 - 0.54| = 0.04 < \varepsilon$$

الجذر هو x_8 =0.58

الفصل الثالث

الحلول العددية لانظمة المعادلات الخطية

Numerical Solation of the Linear equations system

منظومة المعادلات الخطية : هي مجموع من المعادلات التي تحوي على عدد من المتغيرات ومن الدرجة الاولى .

منظومة المعادلات الخطية الاتية

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

حلها ينقسم الى ثلاث حالات

١- اذا كان عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل فان المنظومة لها حل ولكنه ليس وحيدا

٢- اذا كانت عدد المعادلات اكثر من عدد المجاهيل فان المعادلة لايكون لها حل اطلاقا

٣- اذا كانت عدد المعادلات مساوي الى عدد المجاهيل فان المنظومة لها حل وحيد

ملاحظة // سوف نقتصر دراستنا في هذا الفصل على الحالة الثالثة فقط

منظومة المعادلات السابقة يمكن كتابتها بصيغة المصفوفات وبالشكل AX=b

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

لحل المعادلات الخطية

١- طريقة الحذف كاوس *Gauss Elimintation method*

هي تحويل المصفوفة الاعتيادية في النظام AX=b الى مصفوفة مثلثية عليا او سفلى وذلك باجراء سلسلة من عمليات الحذف السطرية الاولية التالية

لتكن منظومة المراد حلها هي

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & b_3 \end{bmatrix}$$

١- تحويل المصفوفة اعلاه الى مصفوفة مثلثية عليا

أ- تصفير قيمة a_{21}، a_{31} من المعادلتين (السطرين) الثاني والثالث على التوالي

ب- تصفر قيمة a_{32} من السطر الثالث

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \vdots & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \vdots & b''_3 \end{bmatrix}$$

٢- حل المنظومة المثلثية العليا الجديدة بطريقة التعويض التراجعي

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \ldots (1)$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \ \ldots (2)$$

$$a''_{33}x_3 = b''_3 \ldots (3)$$

من المعادلة (3)نستخرج قيمة x_3 وهي $x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}$

وبتعويض قيمة x_3 في المعادلة (2) نستخرج قيمة x_2 وهي

$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23}x_3}{a'_{22}}$$

واخيرا نعوض قيمة x_3 و x_2 في المعادلة (1) نستخرج قيمة x_1 وهي

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

يجب ان تكون قيم $a_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0, a''_{33} \neq 0$

مثال // حل منظومة المعادلات التالية بطريقة كاوس للحذف

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + \quad + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

الحل //

١- نمثل المنظومة باستخدام المصفوفة اي معاملات x_1 العمود الاول ومعاملات x_2 العمود الثاني ومعاملات x_3 العمود الثالث والنواتج العمود الرابع
٢- نجعل المصفوفة مثلثية عليا بعد تسميه الصفوف r_1, r_2, r_3 لتسهيل عملية الحل

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & 2 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{matrix} \xrightarrow{r_3 = 2r_2 - r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 = r_1 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 = 2r_3 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

حل المنظومة المثلثية العليا الجديدة بطريقة التعويض التراجعي

$$3x_3 = -1 \rightarrow \quad x_3 = \frac{-1}{3}$$