x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

ملاحظة // عندما تكون الدالة f متعددة حدود من الدرجة n فان عدد الفروقات (n+1) والاعمدة التي تليها تحتوي جميعها على اصفار والعكس صحيح

صيغة نيوتن للفروقات الامامية Forward Newton Method

تستخدم لايجاد القيمة التقريبية للدالة $f(x)$ عند $x = x_m$ الواقعة في بداية جدول البيانات حيث يجب ان تكون البيانات متساوية الابعاد عن بعضها

$$f(x) = y = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + ..$$

حيث $m = \frac{x - x_i}{h}$ و $h = x - x_i$

مثال // باستخدام الفروقات اوجد قيمة تقريبية لـ $f(1)$ اذا علمت ان

x	0	2	4	6	8
y	1	5	9	12	20

الحل//

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	1				
		4			
2	5		0		
		4		-1	
4	9		-1		7
		3		6	
6	12		5		
		8			
8	20				

$$h = x - x_i = 2 - 0 = 2 \quad و \quad m = \frac{x-x_i}{h} = \frac{1-0}{2} = 0.5$$

$$f(x) = y = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + ..$$

$$f(1) = 1 + (0.5)(4) + \frac{0.5(0.5-1)}{2}(0) + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{6}(-1) + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)}{24}(7)$$

$$f(1) = 2.6641$$

Differential of Newton- Forward formula صيغة نيوتن التقدمية للمشتقة

تستخدم صيغ نيوتن للاندراج اذا كانت المسافة بين قيم X متساوية اي ان

$$h = x - x_i = constan \quad \forall i$$

$$f(x) = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + ..$$

$$y = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m^2 - m}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{m^3 - 3m^2 + 2m}{6}\Delta^3 y_0 + ..$$

$$y = y_0 + m\Delta y_0 + \left(\frac{m^2}{2} - \frac{m}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \left(\frac{m^3}{6} - \frac{m^2}{2} + \frac{m}{3}\right)\Delta^3 y_0 + ..$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ m

$$\frac{dy}{dm} = \Delta y_0 + \left(m - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \left(\frac{m^2}{2} - m + \frac{1}{3}\right)\Delta^3 y_0 + \left(\frac{m^3}{6} - \frac{3m^2}{4} + \frac{11m}{12} - \frac{1}{4}\right)\Delta^4 y_0 + \cdots$$

اما المشتقة الثانية

$$\frac{d^2y}{dm^2} = \Delta^2 y_0 + (m-1)\Delta^3 y_0 + \left(\frac{m^2}{2} - \frac{3m}{2} + \frac{11}{12}\right)\Delta^4 y_0 + \cdots$$

حيث $m = \frac{x - x_i}{h}$ و $h = x - x_i$

مثال// جد $f'(2.31)$ لقيم الدالة $f(x) = x^3+2$ عندما $x=0,1,2,3,4,5,6$

الحل//

x	$y = x^3+2$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$

0	2				
		1			
1	3		6		
		7		6	
2	10		12		0
2.31		19		6	
3	29		18		0
		37		6	
4	66		24		0
		61		6	
5	127		30		
		91			
6	218				

$h = x - x_i = 2 - 1 = 1$ و $m = \frac{x-x_i}{h} = \frac{2.31-2}{1}$=0.31

$$f'(x) = \Delta y_0 + (m - \frac{1}{2})\Delta^2 y_0 + (\frac{m^2}{2} - m + \frac{1}{3})\Delta^3 y_0$$

$$f'(2.31) = 19 + (0.31 - 0.5)(18) + \left(\frac{(0.31)^2}{2} - 0.31 + \frac{1}{3}\right)(6)$$

$$= 16.008$$

Back ward Differences (الفروقات التراجعية (الخلفية ٢-

يرمز لمؤثر الفروق التراجعية بالرمز ∇ ويعرف الفرق التراجعي للدالة $f(x)$ بالاتي

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

فيمكن تعريف الفروقات التراجعية بالاتي

$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$ i=n,…1

$$\nabla^2 y_{i=}\nabla(\nabla y_i) = \nabla(y_i - y_{i-1}) = \nabla y_i - \nabla y_{i-1} \quad i = n, \dots, 2$$

$$= \nabla y_i - \nabla y_{i-1} - y_{i-1} - y_{i-2}$$

وبصورة عامة تعرف الفروقات التراجعية من الرتبة k بالاتي

$$\nabla^k y_{i=}\nabla^{k-1}(\nabla y_i) = \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1} \quad i = n, \dots k$$

يمكن الحصول على كل هذه الفروقات من خلال جدول بسيط

x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$
x_0	y_0				
		∇y_0			
x_1	y_1		$\nabla^2 y_0$		
		∇y_1		$\nabla^3 y_0$	
x_2	y_2		$\nabla^2 y_1$		$\nabla^4 y_0$
		∇y_2		$\nabla^3 y_1$	
x_3	y_3		$\nabla^2 y_2$		
		∇y_3			
x_4	y_4				

Backward Newton's Method صيغة نيوتن التراجعية

$$f(x) = y = y_0 + m\nabla y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\nabla^3 y_0 + ..$$