يمكن الحصول على الفروقات النسبية من خلال الجدول

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0	y_0			
		$\Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0}$	
		$\Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$		$\Delta^3 y_0 = \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{x_3 - x_0}$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1}$	
		$\Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$		
x_3	y_3			

صيغة نيوتن الفروقات النسبية Newton's interpolation formula

لتقدير دالة في نقطة ما x^* بالاعتماد على جدول الفروقات النسبية نتبع الصيغة الرياضية الاتية

$$f(x) = y_0 + (x - x_0)\Delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta^2 y_0 +$$
$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\Delta^3 y_0 + \cdots.$$

مثال // كون جدولا للفروقات النسبية ثم استخدمه لحساب قيمة $f(4), f'(4)$

x	0	1	3	5	6
y	-2	-1	25	123	214

الحل //

x	y	$\Delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$	$\Delta^2 y_i = \frac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{x_{i+2} - x_i}$	$\Delta^3 y_i = \frac{\Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i}{x_{i+1} - x_i}$	$\Delta^4 y_i = \frac{\Delta^3 y_{i+1} - \Delta^3 y_i}{x_{i+1} - x_i}$
0	-2				
		$\frac{-1+2}{1-0} = 1$			
1	-1		$\frac{13-1}{3-0} = 4$		

		$\frac{25+1}{3-1}=13$		$\frac{9-4}{5-0}=1$	
3	25		$\frac{49-13}{5-1}=9$		$\frac{1-1}{6-0}=0$
		$\frac{123-25}{5-3}=49$		$\frac{14-9}{6-1}=1$	
5	123		$\frac{91-49}{6-3}=14$		
		$\frac{214-123}{6-5}=91$			
6	214				

$$f(x)= y_0+(x-x_0)\nabla y_0+(x-x_0)(x-x_1)\nabla^2 y_0+$$
$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\nabla^3 y_0$$

$$f(x)=-2+(x-0)(1)+(x-0)(x-1)(4)+$$
$$(x-0)(x-1)(x-3))(1)$$

$$f(x)=-2+x+4x^2-4x+x^3-4x^2+3x$$

$$f(x)=x^3-2$$

$$f(4)= -2+(4-0)(1)+(4-0)(4-1)(4)+(4-0)(4-1)(\ 4-3)(1)$$

$$f(4)=62$$

$$f'(x)=3x^2 \rightarrow \quad f'(4)=3(4)^2=48$$

واجب// كون جدولا للفروقات النسبية ثم استخدمه لحساب قيمة $f(4.5)$ مستخدما صيغة نيوتن

X	1.6	2.9	3.7	4.8
Y	0.6250	0.3448	0.2702	0.2083

Numerical Integration التكامل العددي

هو احد اهم مواضيع التحليل العددي المستخدم لايجاد قيمة تقريبية لتكامل الدالة $y = f(x)$ والمعرفه على الفترة المغلقة [a,b] اي ايجاد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)$ والمستقيمين $x = a, x = b$ ومحور السينات حيث نعمل على تجزئة الفترة [a,b] الى n من الفترات الجزئية وباطوال متساوية (hثابت) وبذلك يكون لدينا n+1من النقاط الجدولية بالشكل

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

اي ان $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$

ومنها نحصل على

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots .. \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Simpsons method طريقة سمبسون

تعتمد طريقة سمبسون على صيغة نيوتن التقدمية للاندراج فبتكامل صيغة نيوتن على فترات تقسمية بصورة فيمكننا الحصول على صيغة تكامل سمبسون m وبالنسبة الى [a,b] منتظمة على الفترة.

$$[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{n-2}, x_n]$$

لناخذ الفترة الاولى $[x_0, x_2]$ وتكامل صيغة نيوتن عليها بتبادل $[x_0, x_2]$ بفترة [0,2]

$$f(x) = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + ..$$

$$m = \frac{x - x_0}{h} \quad \rightarrow \quad dm = \frac{1}{h}dx \quad \rightarrow \quad dx = hdm$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) = h \int_{x_0}^{x_2} (y_0 + m\Delta y_0 + \left(\frac{m^2}{2} - \frac{m}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \left(\frac{m^3}{6} - \frac{m^2}{2} + \frac{m}{3}\right)\Delta^3 y_0 + ..$$

$$= h\,(my_0 + \frac{m^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{m^3}{6} - \frac{m^2}{4}\right)\Delta^2 y_0 + \left(\frac{m^4}{24} - \frac{m^3}{6} + \frac{m^2}{6}\right)\Delta^3 y_0 + \cdots$$

$$= h\,(2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 + \cdots.$$

فاذا اهملنا الحدود من الدرجة الثالثة فما فوق فان التكامل يصبح

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = h\,(2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - y_1 - y_0 + y_0)$$

$$= h\,(2y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_0)$$

$$= h\,\left(\frac{1}{3}y_0 + \frac{4}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2\right) \;\rightarrow= \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

اما التكامل على الفترة $[x_2, x_4]$ فهو

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\,(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

اما التكامل على الفترة $[x_{n-2}, x_n]$ فهو

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\,(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

فتكون صيغة التكامل بطريقة سمبسون بالاتي

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots.. \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + y_4 + 4y_5 + y_6 + .. + y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + .. + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(y_0 + +4(y_1 + y_3 + y_5 + .. + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}\right)$$

مثال// جد قيمة التكامل

$1 - \int_0^1 \frac{1}{1+X} dx$ عندما $h = 0.25$

الحل//

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0.25} = 4$$

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1
y_i	1	0.8	0.667	0.57	0.5

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2 + y_4\right)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+X} dx = \frac{0.25}{3}\left(1 + 4(0.8 + 0.57) + 2(0.667) + 0.5\right) \rightarrow$$

$$= 0.63725$$

$2 - \int_0^6 (1+2x) dx$ عندما $n = 6$

الحل //

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{6-0}{6} = 1$$

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1	3	5	7	9	11	13

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4) + y_6\right)$$

$$\int_0^6 (1+2x)dx = \frac{1}{3}\left(1 + 4(3 + 7 + 11) + 2(5 + 9) + 13\right)$$

$$= 42$$

الواجب //جد قيمة التكامل $n = 8$ عندما $\int_0^4 xlnxdx$