1 – 13- 3 ثالثاً: توزيع بوسون:

اذا كان x متغير عشوائي يتبع توزيع بوسون بالمعلمة λ، $\lambda > 0$ وله دالة كتلة احتمال وكما يلي: $x \sim \mathrm{p}(\lambda)$

$$p_x(x) = p(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & , \quad x = 0,1,2,... \\ 0 & , \quad o.w. \end{cases}$$

ونلاحظ ان دالة كتلة احتمال لتوزيع بوسون تحقق ما يلي:

1- $p_x(x) = p(X = x) \geq 0$

2- $\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1$

<u>نظرية:</u>

اذا كان x متغير عشوائي يتبع توزيع بوسون بالمعلمة λ، $x \sim \mathrm{p}(\lambda)$ فبرهن ان:

1- $E(x) = \lambda$

2- $V(x)=\lambda$

3- $M_x(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$

البرهان:1- التوقع لتوزيع بوسون:

$$E(x)=\sum_{x=0}^{\infty}xp(x)=\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{x\lambda\lambda^{x-1}}{x(x-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

2- التباين لتوزيع بوسون:

$$V(x)=E(x^2)-(E(x))^2$$

$$E(x^2)=[E(x(x-1))]+E[x]$$

$$[E(x(x-1))]=\sum_{x=0}^{\infty}x(x-1)p_x(x)=\sum_{x=0}^{\infty}x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\sum_{x=2}^{\infty}\frac{x(x-1)}{x(x-1)}\frac{e^{-\lambda}\lambda^2\lambda^{x-2}}{(x-2)!}$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}=\lambda^2e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda^2.1=\lambda^2$$

$$E(x^2)=[E(x(x-1))]+E[x]=\lambda^2+\lambda$$

اذن التباين

$$V(x)=E(x^2)-(E(x))^2=(\lambda^2+\lambda)-\lambda^2=\lambda$$

3- دالة توليد العزوم لتوزيع بوسون:

$$M_x(t)=E[e^{tx}]=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}p_x(x)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!}=e^{-\lambda}e^{(\lambda e^t)}=e^{\lambda(e^t-1)}=\exp(\lambda(e^t-1))$$

اذا:

$$M_x(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

مثال(26):

لوحظ ان هنالك 2 بكتريا لكل سنتمتر من الماء المأخوذ من مستنقع معين في نموذج من ماء ذلك المستنقع حجمه 2 سنتمتر مكعب احسب احتمالية ان يحتوي هذا النموذج

1- في الاكثر 5 بكتريا. 2- في الاقل 4 بكتريا.

الحل:

لنفرض ان x يمثل عدد البكتريا الموجودة في النموذج ولما كان x يأخذ قيما غير محددة من وحدة حجمية فمن المعقول ان نفرض ان x يتبع توزيع بوسون.

ولما كان هنالك 2 بكتريا لكل سنتمتر من الماء فبالمعدل والتناسب سيكون لدينا 4 بكتريا لكل سنتمتر من الماء أي ان $\lambda = 4$.

$$p_x(x) = p(X = x) = \begin{cases} \frac{4^x e^{-4}}{x!} & , \quad x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & , \quad o.w. \end{cases}$$

1- في الاكثر 5 بكتريا

$$p(x \le 5) =$$
$$= p(x=0) + p(x=1) + p(x=2) + p(x=3) + p(x=4) + p(x=5)$$
$$= 0.018 + 0.073 + 0.147 + 0.195 + 0.195 + 0.156 = 0.784$$

2- في الاقل 4 بكتريا

$$p(x \geq 4)$$
$$= 1 - p(x < 4)$$
$$= 1 - [p(x=0) + p(x=1) + p(x=2) + p(x=3)]$$
$$= 1 - [0.018 + 0.073 + 0.147 + 0.195] = 1 - [0.433] = 0.567$$

1 – 14 التوزيعات الاحتمالية المستمرة:

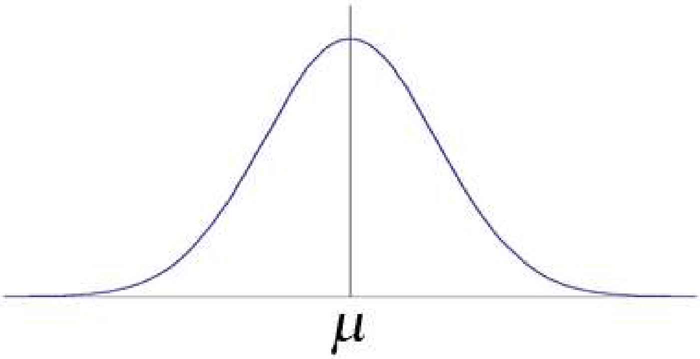
اولاً: التوزيع الطبيعي Normal Distribution

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية وأكثرها استعمالا على الاطلاق ، بل انه يحتل موضع الصدارة في الاحتمالات والاحصاء ، كذلك فإن معظم التوزيعات (كتوزيعات الطول والوزن) وتوزيعات أخطاء المشاهدات (الفروق بين القيم الحقيقية والقيم المشاهدة) تأخذ شكلا قريبا منه ، ويستخدم هذا التوزيع في كثير من التجارب الصناعية واختبارات الجودة وله استخدامات واسعه في اختبارات الفروض والعينات الكبيرة وتوزيعات المعاينة وغيرها.

من اكتشف هذا التوزيع؟

كان أول من اكتشفت هذا التوزيع العالم دي موافر De Moiver عام 1733 ومن بعده العالم Gauss عام 1809 ويعرف هذا التوزيع أيضًا باسمه أي توزيع كاوس Gauss Distributionولهذا التوزيع خواصه الرياضية ويمكن ان يكون تقريباً أو حالة خاصة لتوزيعات أخرى مثل توزيع ثنائي الحدين. ان منحنى التوزيع الطبيعي متماثل حول خط راسي يمر بالوسط الحسابي الذي يساوي بسبب التماثل كلا من الوسيط والمنوال. وهو ناقوسي الشكل له قمه واحده ويمتد طرفاه إلى ما لانهاية(يمينا ويسارا (فيقترب طرفاه من المحور الأفقي ولكنهما لا يلتقيان معه) ومع ذلك فان المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح) كما هو الحال في المساحة تحت منحنى داله كثافة احتمال أي متغير عشوائي متصل أخر.

والشكل ذلك يمثل المنحنى:



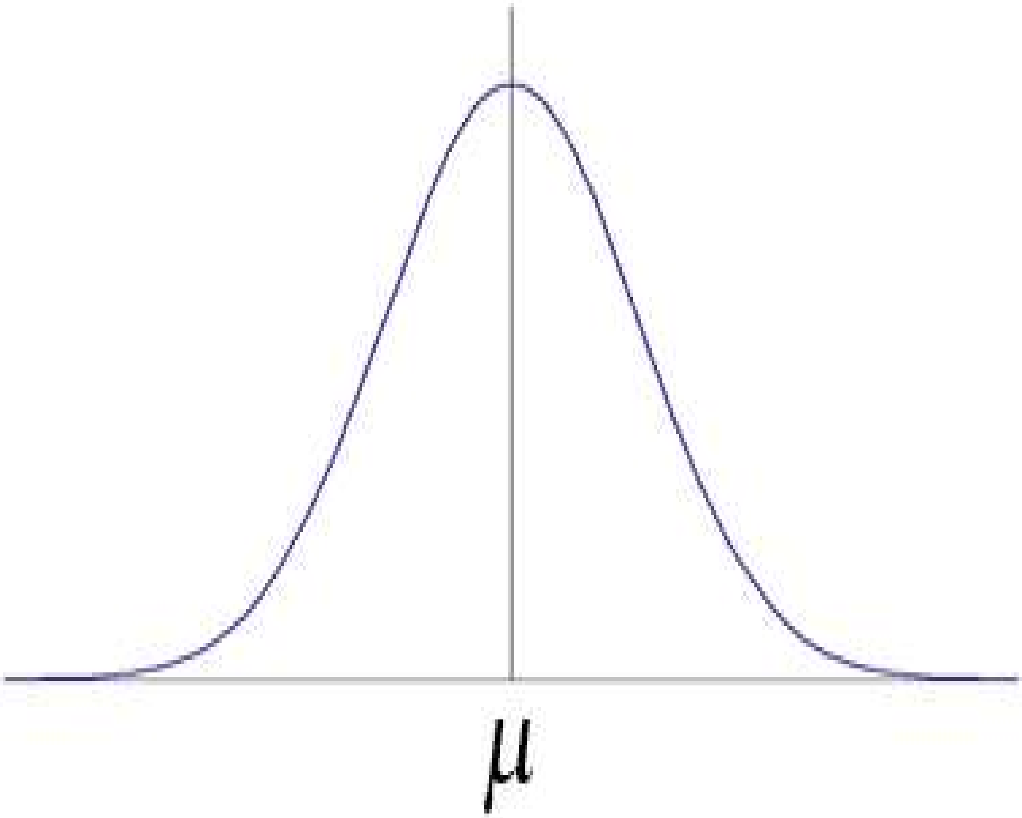
ان كثيرا من الظواهر التي تظهر لنا في التجارب العلمية تتوزع توزيعا طبيعياً ويعرف التوزيع الطبيعي كما يلي:

$$f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2};-\infty<x<\infty$$

حيث ان μ **هو الوسط الحسابي ،** $-\infty<\mu<\infty$ **، و ان** σ^2 **هو التباين** $\sigma^2>0$ **وهما يمثلان معلمتي التوزيع**

$x\sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ ، **وان** $\sigma>0$ **هو الانحراف المعياري(القياسي) وهو جذر التباين ،**

وكذلك ان: $\pi\approx\frac{22}{7}\approx 3.14$ ، $e\approx 2.718$.



شكل (1) التوزيع الطبيعي

<u>بعض خصائص منحني التوزيع الطبيعي:</u>

اذا كان x هو متغير عشوائي مستمر فيقال بان هذا المتغير يتوزع طبيعياً اذا كان غالبية عناصره تتمركز حول مركزه (المعدل–الوسيط–المنوال) وتقل نسبة العناصر كلما ابتعدنا نحو اليمين أو نحو اليسار عن المركز فمثلا اطوال الاشخاص في مجتمع معين فأن غالبية الناس تكون اطوالهم قريبة من المعدل العام لطول الشخص $x = \mu$ اما الاشخاص الطوال أو القصار تقل كلما ابتعدنا عن المركز (المعدل العام) ومن أهم خصائص منحني التوزيع الطبيعي:

1– منحني التوزيع الطبيعي له شكل الناقوس (جرس) والذي يسمى بالمنحني الطبيعي وهذا الناقوس متماثل وتقع قمته فوق المتوسط ويمتد طرفاه الى الما لا نهاية من الجانبين دون ان يلامسا المحور الافقي.

2– ان دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ متناظرة (متماثلة) حول الوسط الحسابي $x = \mu$.

3– ان الوسط الحسابي والوسيط و المنوال متساوية والتوزيع مستمر.

4- ان المساحة الكلية تحت المنحني الطبيعي تساوي واحد صحيح أي ان:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

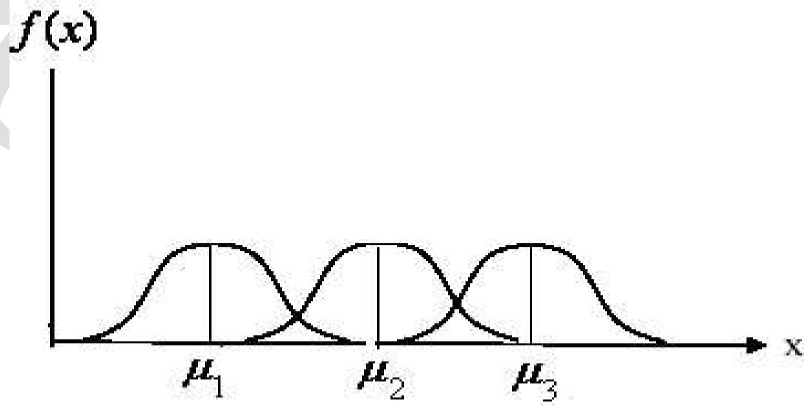
$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} ; -\infty < x < \infty$$

<u>البرهان</u>: غير مطلوب.

5- ان وسيط هذا التوزيع عند $x = \mu$ وهذا واضح من الرسم للمنحني الطبيعي أي ان المساحة الى يمين المستقيم $x = \mu$ هي تساوي 0.5 وان المساحة الى يسار المستقيم $x = \mu$ هي تساوي 0.5 أيضاً.

6- ان المنوال للتوزيع الطبيعي يكون ايضا عند $x = \mu$ وان الدالة $f(x)$ تبلغ اعلى قيمة لها في $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ عند $x = \mu$.

7- يتحدد التوزيع بمعلومية μ و σ^2 وهما الوسط الحسابي والتباين ويختلف التوزيع اذا اختلفت μ أو σ^2 حيث ان قيمة الوسط الحسابي μ تحدد موقع التوزيع الطبيعي على الخط الحقيقي فكلما زادت هذه القيمة تغير موقع المنحني في الاتجاه الايمن والعكس صحيح. بينما σ^2 تبين مقدار تشتت أو تفرطح منحني الدالة فكلما كانت σ^2 صغيرة كلما كان المنحني مدببا وكلما كانت كبيرة كان المنحني مفرطح.



شكل (2) ثلاث توزيعات طبيعية متساوية التباينات ومختلفة المتوسطات