**اذا كان $x$ متغير عشوائي يمثل درجات الطلبة في ذلك الامتحان فان الاحتمال المطلوب هو $p(x > 643)$ وبالتالي فأننا سنحول هذا المتغير الى متغير $Z$ طبيعي معياري حسب المعادلة: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ واستخدام جدول(1) الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري نجد ان:**

$$p(x > 643) = p(\tfrac{x-500}{100} > \tfrac{643-500}{100}) = p(Z > 1.43)$$
$$= 0.5 - p(0 < Z < 1.43) = 0.5 - 0.4236 = 0.0764$$

**مثال(34): ينتج مصنع بغداد للنضائد نضائد صغيرة متوسط عمرها الزمني يساوي 76 ساعة بانحراف معياري يساوي 10 ساعات فاذا علمت ان العمر الزمني لهذه النضائد يتبع التوزيع الطبيعي فأوجد احتمال ان يكون العمر الزمني لنضيدة ما :**

**أ- بين 71 و82 ساعة؟ ب- أكثر من 75 ساعة ؟ جـ - أقل من 78 ساعة؟.**

**الحل: أ- نحول المتغير الطبيعي $x$ الى متغير الطبيعي القياسي $Z$ حسب المعادلة**

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$p(71 \le x \le 82) = p(\tfrac{71-76}{10} \le \tfrac{x-\mu}{\sigma} \le \tfrac{82-76}{10})$$
$$= p(-0.5 \le Z \le 0.6) = p(-0.5 \le Z \le 0) + p(0 \le Z \le 0.6)$$
$$= p(0 \le Z \le 0.5) + p(0 \le Z \le 0.6) = 0.1915 + 0.2257 = 0.4172$$

**علما ان الخطوة الاخيرة حسب جدول(1) الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري.**

**ب - سنحول المتغير الطبيعي $x$ الى متغير $Z$ طبيعي معياري حسب المعادلة: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ واستخدام جدول(1) الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري نجد ان:**

$$p(x > 75) = p(\tfrac{x-\mu}{\sigma} > \tfrac{75-76}{10}) = p(Z > -0.10)$$
$$= p(-0.10 < Z < 0) + 0.5 = p(0 < Z < 0.1) + 0.5$$
$$= 0.0398 + 0.5 = 0.5398$$

**جـ - سنحول المتغير الطبيعي $x$ الى متغير $Z$ طبيعي معياري حسب المعادلة:**

$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ **واستخدام جدول(1) الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري نجد ان:**

$$p(x < 78) = p(\tfrac{x-\mu}{\sigma} < \tfrac{78-76}{10}) = p(Z < 0.2)$$
$$= 0.5 + p(0 < Z < 0.2) = 0.5 + 0.0793 = 0.5793$$

**ثالثاً: توزيع مربع كاي**

**ان لهذا التوزيع علاقة بالتوزيع الطبيعي وله تطبيقات عديدة في الاحصاء الاستنتاجي حيث يقال ان المتغير العشوائي $X$ يتوزع وفق توزيع مربع كاي بدرجة حرية $n$ وله دالة كثافة احتمال كما يلي:**

$$f_x(X)=\begin{cases}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{\frac{-x}{2}} & ,x>0\\ 0 & ,\quad x\le 0\end{cases}$$

**أي ان** $X\sim\chi^2_{(n)}$ **وان:**

**1-** $E(X)=n$

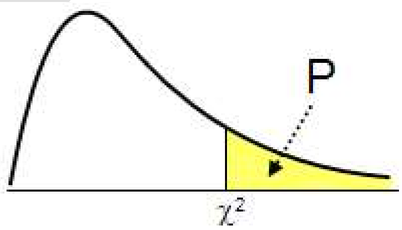
**2-** $V(X)=2n$

**3-** $M_x(t)=(\frac{1}{1-2t})^{n/2},t<1/2$

**وحيث ان دالة كثافة هذا التوزيع تعتمد على** $n$ **سيكون لهذه الدالة شكل خاص بها ولذلك وجدت جداول خاصة جدول (2) لتوزيع مربع كاي ولقيم** $n=1,2,3,...$ **وذلك لحساب الاحتمالات تحت منحني هذا التوزيع وبتعريف** $\chi^2_{\alpha,n}$ **القيمة المئوية لمتغير مربع كاي بدرجات حرية تساوي** $n$ **بحيث ان احتمال ان** $\chi^2_{(n)}$ **اكبر من هذه القيمة يساوي** $\alpha$ **أي ان :**

$$p(\chi^2_{(n)}>\chi^2_{\alpha,n})=\int_{\chi^2_{\alpha,n}}^{\infty}f_x(x)dx=\alpha$$

**وهذا الاحتمال موضح في المنطقة المضللة في الشكل الاتي :**




**شكل (11) القيمة المئوية** $\chi^2_{\alpha,n}$ **لتوزيع مربع كاي**

**مثال(35): اذا كان** $\chi^2_{(n)}$ **ترمز لمغير عشوائي يتبع توزيع مربع كاي بدرجات حرية** $n$ **فباستخدام جدول (2) الخاص بتوزيع مربع كاي جد كلا مما يلي:**

**أ-** $\chi^2_{0.01,5}$

**ب-** $\chi^2_{0.05,20}$

ت- $\chi^2_{0.90,28}$

**الحل: أ- من جدول (2) الخاص بتوزيع مربع كاي وبالنظر الى الصف $n$ عندما $n=5$ وتقاطعها مع العمود $\alpha=0.01$ نحصل على القيمة الجدولية المطلوبة وكما يلي:**

$$\chi^2_{0.01,5}=15.09$$

**ب - من جدول (2) الخاص بتوزيع مربع كاي وبالنظر الى الصف $n$ عندما $n=20$ وتقاطعها مع العمود $\alpha=0.05$ نحصل على القيمة الجدولية المطلوبة وكما يلي:**

$$\chi^2_{0.05,20}=31.41$$

**ت - من جدول (2) الخاص بتوزيع مربع كاي وبالنظر الى الصف $n$ عندما $n=28$ وتقاطعها مع العمود $\alpha=0.90$ نحصل على القيمة الجدولية المطلوبة وكما يلي:**

$$\chi^2_{0.90,28}=18.94$$

**مثال(36): اذا كان $\chi^2_{(n)}$ ترمز لمغير عشوائي يتبع توزيع مربع كاي بدرجات حرية $n$ فباستخدام جدول (2) الخاص بتوزيع مربع كاي جد كلا مما يلي:**

أ- $p(\chi^2_{(13)}<19.81)$

ب- $p(\chi^2_{(26)}<-10)$

ت- $p(\chi^2_{(25)}\geq 34.38)$

ث- $p(9.59\leq\chi^2_{(20)}\leq 34.17)$

**الحل:**

**أ- من جدول (2) الخاص بتوزيع مربع كاي والذي يعطي القيم المئوية**

$$p(\chi^2_{(13)} < 19.81) = 1 - p(\chi^2_{(13)} \geq 19.81)$$

**وبالنظر الى الصف $n$ عندما $n = 13$ نجد ان العدد $19.81$ يقع في العمود 0.1 ، وعليه فأن:**

$$p(\chi^2_{(13)} < 19.81) = 1 - 0.1 = 0.9$$

**ب-**

$$p(\chi^2_{(26)} < -10) = 0$$

**وذلك لان متغير مربع كاي ياخذ قيم غير سالبة.**

**ت – من جدول (2) الخاص بتوزيع مربع كاي نجد ان:**

$$p(\chi^2_{(25)} \geq 34.38) = 0.1$$

**ث – من جدول (2) الخاص بتوزيع مربع كاي نجد ان:**

$$p(9.59 \leq \chi^2_{(20)} \leq 34.17) = p(\chi^2_{(20)} \geq 9.59) - p(\chi^2_{(20)} \geq 34.17)$$
$$= 0.975 - 0.025 = 0.95$$

**<u>رابعا</u>: توزيع t**

**ان لهذا التوزيع علاقة بالعينات العشوائية التي يتم اختيارها من مجتمع طبيعي وله تطبيقات عديدة في الاحصاء الاستنتاجي ولقد وضعت جداول خاصة به ويعرف هذا التوزيع كما يلي:**

**اذا كان $X$ متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري $X \sim N(0,1)$ وكان $Y$ متغيراً عشوائياً يتبع توزيع مربع كاي بدرجة حرية $n$ وكان المتغير العشوائي $Y$ مستقلا عن المتغير العشوائي $X$ فأن المتغير العشوائي**

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

**له توزيع يطلق عليه تسمية توزيع t بدرجات حرية تساوي n ويرمز له بالرمز $T \sim t_n$ وله دالة كثافة احتمال كما يلي:**

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(\frac{1}{2})}(1+\frac{t^2}{n})^{-(n+1)/2}; t \in R$$

**خصائص توزيع t :**

**1-** الدالة $f_T(t)$ **متناظرة أي ان** $f_T(t) = f_T(-t)$ **ولها شكل ناقوسي يشبه شكل التوزيع الطبيعي وان** $f_T(t) \to 0$ **كلما اقتربت** $t$ **من** $\infty$ **، وعندما تكون** $n$ **كبيرة فان توزيع** $t$ **يقترب من التوزيع الطبيعي أي ان عندما** $t \to \infty$ **يكون**

$$f_T(t) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

**ولكن عندما تكون** $n$ **صغيرة فان توزيع** $t$ **يختلف عن التوزيع الطبيعي أي ان**

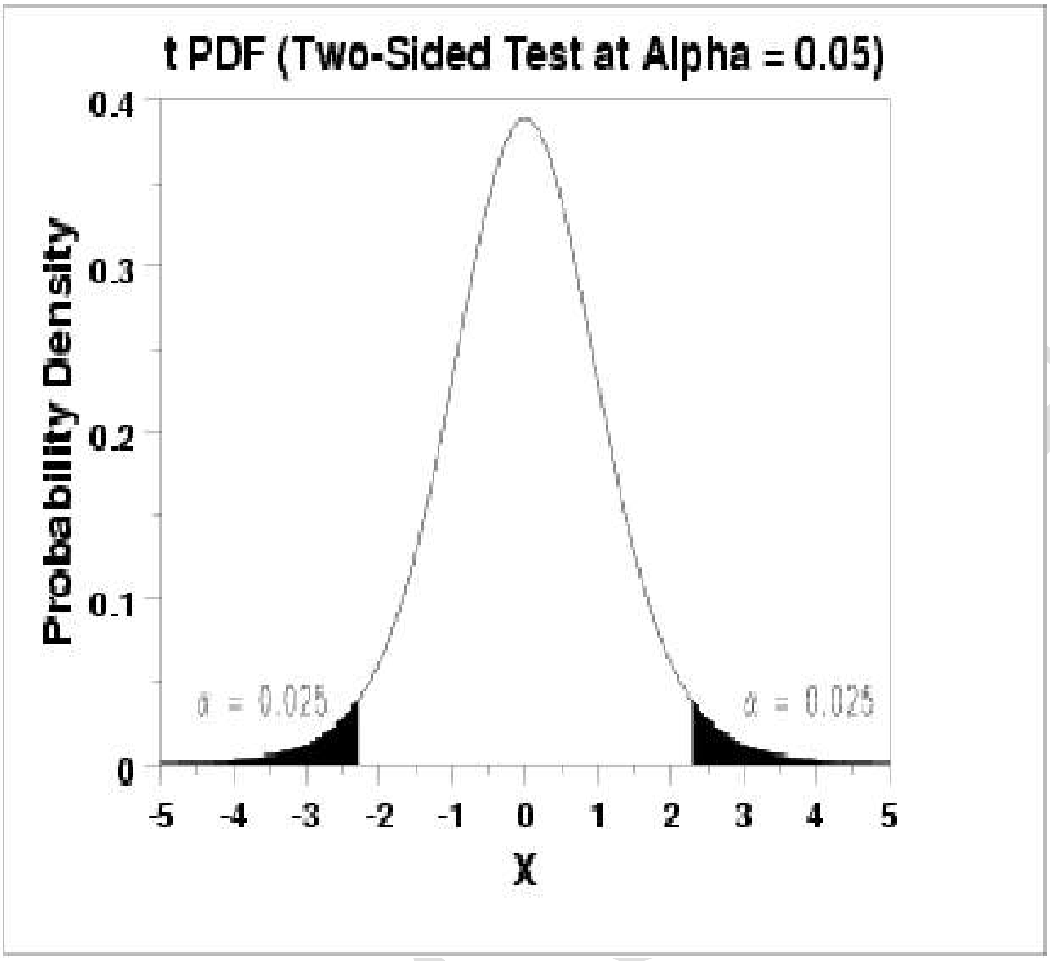
$$p(|T| \geq t_0) \geq p(|Z| > t_0)$$

**وهذا يعني ان هنالك احتمال اكبر من طرف توزيع** $t$ **مقارنة بالتوزيع الطبيعي المعياري . وسوف نستخدم الرمز** $t_{\alpha,n}$ **لقيم** $T$ **حيث ان**

$$p(T > t_{\alpha,n}) = \int_{t_{\alpha,n}}^{\infty} f_T(t)dt = \alpha$$

**وجدول (3) يعطي قيم** $t_{\alpha,n}$ **عندما** $n = 1,2,3,\ldots,60$ **حيث ان** $t_{\alpha,n}$ **تمثل التجزؤ ذا المرتبة** $1-\alpha$ **وحيث ان التوزيع متناظر وعليه فأن القيم السالبة يمكن الحصول عليها من خلال المعادلة** $t_{1-\alpha,n} = -t_{\alpha,n}$ **كما موضح بالشكل الاتي:**

**شكل (12) القيمة المئوية لتوزيع t وان** $\alpha = 0.05$




**2- القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي** $T$ **تساوي صفر أي ان :**

$$E(T) = 0$$

**واذا كانت** $n > 2$ **فان**

$$V(T) = E(T^2) - (E(T))^2 = E(T^2) - 0 = E(T^2) = n(n-2)$$

**مثال(37): باستخدام جدول(3) الخاص بتوزيع t وان درجة حرية** $n = v$

**جد كلا مما يلي:**

أ- $t_{0.05,12}$

ب- $t_{0.025,20}$